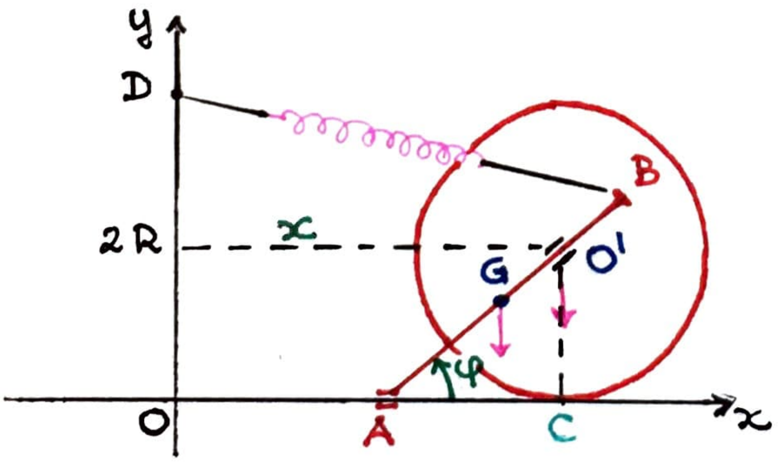
Esercizio 3

Nel piano verticale Oxy si consideri il sistema materiale pesante costituito da un disco omogeneo, di massa m e raggio R, vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse Ox e da un'asta omogenea AB, di massa m e lunghezza $2R$, vincolata con l'estremo A a scorrere senza attrito su Ox ed a passare per un cursore posto in O', centro del disco. Oltre alla forza peso, sul sistema agisce una forza elastica $\overline{F}_B = -k(B-D)$ applicata in B, che lo richiama verso un pto geometrico $D \in Oy$ di coordinate $D(0,2R)$.

$k = mg/\lambda R$, $\lambda > 0$.



C : c.c.r. del disco

sistema con 2 gradi di libertà

$$\begin{cases} q_1 = x_{O'} = x \in \mathbb{R} \\ q_2 = B\hat{A}C = \varphi \end{cases}$$

Poichè B non può oltrepassare O' (cioè non esce dal cursore in O') l'angolo φ è limitato.

$\overline{O'C} = \overline{O'A} \sin\varphi$

$\overline{O'A} = \dfrac{R}{\sin\varphi}$

quando $\overline{O'A} = 2R$ $(O' \equiv B) \Rightarrow \dfrac{R}{\sin\varphi} = 2R \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \varphi = \pi/6, \ 5/6\,\pi$

$\Rightarrow \varphi \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi\right]$

$\overline{AC} = \dfrac{R}{\sin\varphi}\cos\varphi = R\cot g\,\varphi$

PUNTI NOTEVOLI

$O'(x, R)$

$A(x - R\cot g\,\varphi, 0)$

$G(x - R\cot g\,\varphi + R\cos\varphi;\ R\sin\varphi)$

$B(x - R\cot g\,\varphi + 2R\cos\varphi;\ 2R\sin\varphi)$

$D(0, 2R)$ non ha massa

$\overline{BD}^2 = (x - R\cot g\,\varphi + 2R\cos\varphi)^2 + (2R\sin\varphi - 2R)^2$

Forze conservative $\Rightarrow \exists$ potenziale $\mathcal{U}$.

$\mathcal{U} = -mg\,\underset{R}{\underset{\|}{y_{O'}}} - mg\,y_G - \dfrac{1}{2}k\,\overline{BD}^2 + c$

(1) $\mathcal{U} = -mg\,R\sin\varphi - \dfrac{1}{2}k(x - R\cot g\,\varphi + 2R\cos\varphi)^2 -$

$- \dfrac{1}{2}k\,4R^2(\sin\varphi - 1)^2 + c$

Posizioni di equilibrio ordinarie $x \in \mathbb{R}$, $\varphi \in (\pi/6, 5/6\,\pi)$

$\mathcal{U}_x = -k(x - R\cot g\,\varphi + 2R\cos\varphi) = 0$

$\mathcal{U}_\varphi = -mg\,R\cos\varphi - k\overset{0}{\overset{\|}{(x - R\cot g\,\varphi + 2R\cos\varphi)}}\cdot$

$\dfrac{d}{d\varphi}(x - R\cot g\,\varphi + 2R\cos\varphi) - 4kR^2(\sin\varphi - 1)\cos\varphi = 0$

Da $U_\varphi = 0$ allora si ricava:

$$-mgR\cos\varphi - 4\,{}^{mg}/_{\lambda R} \cdot R^2(\sin\varphi - 1)\cos\varphi = 0$$

$$\cos\varphi\left[1 + \frac{4}{\lambda}(\sin\varphi - 1)\right] = 0$$

- $\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$ o $\varphi = \frac{3}{2}\pi \notin I$

se $\varphi = \pi/2$ da $U_x = 0$ ottengo $x = 0 \Rightarrow (0, \pi/2)\ \exists\ \forall \lambda > 0$

- $\lambda + 4\sin\varphi - 4 = 0 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{4-\lambda}{4}$

poichē $\varphi \in (\pi/6, \frac{5}{6}\pi)$ $\sin\varphi \in (\frac{1}{2}, 1]$

$\frac{4-\lambda}{4} > \frac{1}{2} \to \frac{2-\lambda}{4} > 0 \Rightarrow \lambda < 2$

$\frac{4-\lambda}{4} \leq 1 \quad \lambda \geq 0$ ma $\lambda > 0$ sempre vera.

allora

$\bar{\varphi} = \arcsin\frac{4-\lambda}{4} \to \begin{cases} \varphi_{1e} = \bar{\varphi} \\ \varphi_{2e} = \pi - \bar{\varphi} \end{cases} \quad \exists$ se $0 < \lambda < 2$

sostituiti in $U_x = 0$ si ottiene

$\bar{x} = R\cot g\,\varphi_e - 2R\cos\varphi_e$

se $\varphi_e = \varphi_{1e} \Rightarrow x_e = x_{1e} \quad (x_{1e}, \bar{\varphi})$

se $\varphi_e = \varphi_{2e} \Rightarrow x_e = x_{2e} \quad (x_{2e}, \pi - \bar{\varphi}) \quad x_{2e} = -x_{1e}$

Ci sono 3 posizioni di equilibrio ordinarie

2 $\begin{cases} (0, \pi/2)\ \exists\ \forall \lambda > 0 \\ (x_{1e}, \bar{\varphi});\ (-x_{1e}, \pi - \bar{\varphi})\ \exists \text{ se } 0 < \lambda < 2 \end{cases}$

Posizioni di equilibrio di confine $\varphi = \pi/6$; $\varphi = \frac{5}{6}\pi$

$$\delta L^{(a)} = Q_x \delta x + Q_\varphi \delta \varphi \leq 0$$

$$Q_x = \frac{\partial U}{\partial x} \; ; \; Q_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

$\forall x$ δx è invertibile $\Rightarrow Q_x = 0$

$$\delta L = Q_\varphi \delta \varphi \leq 0$$

in $\varphi = \pi/6$ $\delta\varphi \geq 0 \Rightarrow Q_\varphi \leq 0$

$$Q_x(\varphi = \pi/6) = 0 \Rightarrow -k\left(x - R\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 + 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$Q_\varphi(x=0, \varphi=\pi/6) = -mgR\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\,\frac{mg}{\lambda R}\cdot R^2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$= -mgR\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{4}{\lambda}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= -mgR\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\lambda-2}{\lambda}\right) \leq 0 \quad \text{se} \quad \frac{\lambda-2}{\lambda} \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$\Rightarrow (0, \pi/6)$ è di confine e di equilibrio $\rightarrow$ se $\lambda \geq 2$

in $\varphi = \frac{5}{6}\pi$ $\delta\varphi \leq 0 \Rightarrow Q_\varphi \geq 0$

$$Q_x\left(\varphi = \frac{5\pi}{6}\right) = -k\left(x + R\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 - 2R\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$Q_\varphi\left(x=0, \varphi=\frac{5}{6}\pi\right) = mgR\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\,\frac{mg}{\lambda R}\,R^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$= mgR\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{2}{\lambda}\right) \geq 0 \quad \text{se} \quad \lambda \geq 2$$

$\Rightarrow \left(0, \frac{5}{6}\pi\right)$ è di confine e di equilibrio

3 $(0, \pi/6)$; $\left(0, \frac{5}{6}\pi\right)$ di confine e equilibrio se $\lambda \geq 2$.

Energia cinetica

$$T = T_D + T_{AB}$$

$$T_D = \frac{1}{2} I_{Cz}\,\omega_D^2 \quad , I_{Cz} = \frac{3mR^2}{2} \quad ; \bar{\omega}_D = -\dot{\theta}\,\bar{k} \quad \text{dove} \quad \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} mR^2 \cdot \frac{\dot{x}^2}{R^2} \qquad\qquad = -\frac{\dot{x}}{R}\,\bar{k}$$

$$= \frac{3}{4} m \dot{x}^2$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2} m v_G^2 + T' \quad , T' = \frac{1}{2} I_{Gz}\,\omega_{AB}^2 \quad ; \bar{\omega}_{AB} = +\dot{\varphi}\,\bar{k}$$

$$I_{Gz} = \frac{1}{12} m \cdot 4R^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{mR^2}{3} \dot{\varphi}^2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} + R\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}\dot{\varphi} - R\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{y}_G = R\cos\varphi\,\dot{\varphi} \end{cases}$$

$$v_G^2 = \dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{R^2}{\sin^4\varphi}\dot{\varphi}^2 + \frac{2R\,\dot{x}\dot{\varphi}}{\sin^2\varphi} - 2R\sin\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi} -$$
$$- 2R^2\frac{1}{\sin\varphi}\dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \Big[\frac{3}{2}\dot{x}^2 + \dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{R^2}{\sin^4\varphi}\dot{\varphi}^2 + 2R\frac{1}{\sin^2\varphi}\dot{x}\dot{\varphi} -$$
$$- 2R\sin\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi} - 2R^2\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\varphi}^2 \Big]$$

(4) $$T = \frac{1}{2} m \Big[\frac{5}{2}\dot{x}^2 + 2R\Big(\frac{1}{\sin^2\varphi} - \sin\varphi\Big)\dot{x}\dot{\varphi} +$$
$$+ \Big(\frac{4}{3} + \frac{1}{\sin^4\varphi} - \frac{2}{\sin\varphi}\Big) R^2\dot{\varphi}^2 \Big]$$

STABILITÀ

$\mathcal{U}_{xx} = -k < 0$ sempre

$$\mathcal{U}_{x\varphi} = -kR\left(\frac{1}{\sin^2\varphi} - 2\sin\varphi\right)$$

$$\mathcal{U}_{\varphi\varphi} = mgR\sin\varphi - 4kR^2\cos^2\varphi + 4kR^2(\sin\varphi - 1)\sin\varphi +$$

$$- kR^2\left(\frac{1}{\sin^2\varphi} - 2\sin\varphi\right)^2 - k\,(\underbrace{x - R\,\mathrm{cotg}\,\varphi + 2R\cos\varphi}_{\equiv\ 0 \text{ all'equilibrio}})\cdot$$

$$\cdot R \cdot \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi} - 2\sin\varphi\right)$$

Da valutare nelle 3 p. di eq. ordinarie

$$|\mathcal{H}| = -k\,mgR\sin\varphi + 4k^2R^2(1 - \sin^2\varphi) - 4k^2R^2(\sin\varphi - 1)\sin\varphi$$

$$+ \cancel{k^2R^2\left(\frac{1}{\sin^2\varphi} - 2\sin\varphi\right)^2} - \cancel{k^2R^2\left(\frac{1}{\sin^2\varphi} - 2\sin\varphi\right)^2}$$

$$= -k\,mgR\sin\varphi + 4k^2R^2(1 - 2\sin^2\varphi + \sin\varphi)$$

se $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$: = -kmgR + 4k^2R^2(1 - 2 + 1) = -k\,mgR < 0 \quad \text{INSTABILE}$$

se $\varphi = \bar{\varphi}$

$$: = \frac{m^2g^2}{4\lambda}(8 - \lambda) > 0 \text{ se } \lambda < 8 \quad \text{STABILE}$$

$\Rightarrow \varphi_{1e}, \varphi_{2e}$ dove esistono sono STABILI

REAZIONI VINCOLARI ESTERNE

$\bar{\Phi}_A = \Phi_A \bar{J}$

$\bar{\Phi}_C = \Phi_{Cx} \bar{\imath} + \Phi_{CY} \bar{J}$

REAZ. VINCOLARE INTERNA

$\bar{\Phi}_{O'} \perp \overline{AB}$

All'equilibrio ecco le eq. cardinali della statica:

$$\begin{cases} \bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0} \\ \bar{\Omega}^e_C + \bar{\Psi}^e_C = \bar{0} \end{cases}$$ per il sistema

$\bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0}$ per il disco

1) $m\bar{g} - k(B-D) + m\bar{g} + \bar{\Phi}_A + \bar{\Phi}_C = \bar{0}$

2) $(G-C) \times m\bar{g} + (A-C) \times \bar{\Phi}_A + (B-C) \times [-k(B-D)] = \bar{0}$

3) $m\bar{g} + \bar{\Phi}_C + \bar{\Phi}_{O'} = \bar{0}$

1) proiettata su Ox e su Oy:

$$\begin{cases} -kx_B + \Phi_{Cx} = 0 \\ -2mg - k(y_B - y_D) + \Phi_A + \Phi_{CY} = 0 \end{cases}$$

2) $mg(x_C - x_G) - \Phi_A(x_C - x_A) + k[2R(\underset{\substack{\equiv \\ 0}}{x_B} - x_C) + \underset{\substack{\equiv \\ 0}}{x_B} y_B] = 0$

3) basta proiettarla su Ox:

$\Phi_{Cx} + \Phi_{O'} \sin\varphi = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_{Cx} = kx_B \equiv 0 \\ \Phi_{CY} = 2mg + k(y_B - 2R) - \Phi_A \\ \Phi_A = [mg(R\cot g\varphi - R\cos\varphi) + k(-2Rx)]/(R\cot g\varphi) \end{cases}$$

All' equilibrio:

$$\phi_A = \frac{mg\cancel{R}(\cot\varphi_e - \cos\varphi_e) - 2k\cancel{R}x_e}{\cancel{R}\cot\varphi_e}$$

$$= mg\left[1 - \sin\varphi_e - \frac{2}{\lambda}(\cot\varphi_e - 2\cos\varphi_e)\right]$$

$\Downarrow$

$$\phi_{CY} = 2mg + \frac{mg}{\lambda\cancel{R}} \cdot 2\cancel{R}(\sin\varphi_e - 1) - \phi_{A\,eq.}$$

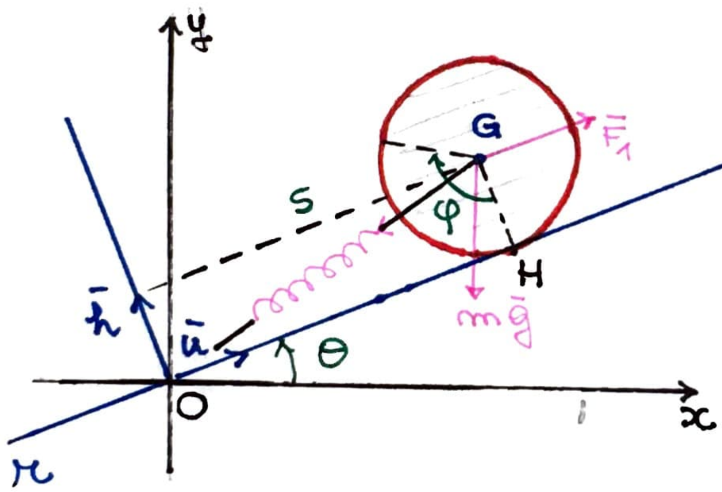
$$\phi_{CX} \equiv 0$$

$$\phi_{O1} = -\frac{\phi_{CX}}{\sin\varphi} \equiv 0$$

Da valutare in $\varphi_e = \pi/2$ e $\varphi_e = \bar{\varphi}_{1,2}$

Esercizio 4

In un piano verticale Oxy, un disco omogeneo, di massa m e raggio R, rotola senza strisciare su una guida rettilinea r che ruota attorno ad O.
Oltre alla forza peso sul disco agisce una forza elastica $\vec{F}_G = -k(G-O)$ applicata in G, baricentro del disco, con $k = \alpha mg/R$ $(\alpha > 0)$ e una forza $\vec{F}_1(G) = 2mg\,\bar{u}$ sempre applicata in G, dove $\bar{u}$ versore della retta r.



sistema con 2 g. di libertà:

$$\begin{cases} q_1 = s_G = s \in \mathbb{R} \\ q_2 = \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

Il disco rotola senza strisciare sulla retta che però non è fissa ⇒ il punto di contatto H NON È IL C.I.R.

Il legame tra s e φ (indicato in figura) è:

$$\dot{s} = R\dot{\varphi}$$

$$\bar{\omega}_D = \bar{\omega}_{rel} + \bar{\omega}_{trasc} = -\dot{\varphi}\,\bar{k} + \dot{\theta}\,\bar{k} = \left(-\frac{\dot{s}}{R} + \dot{\theta}\right)\bar{k}$$

Forze conservative $\Rightarrow \exists$ potenziale $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} = -mg\, y_G - \frac{1}{2} k\, \overline{GO}^2 + \mathcal{U}_{F_1} + c$$

$$d\mathcal{U}_{F_1} = dL = \bar{F}_1 \cdot dG = 2mg\,\bar{u} \cdot (dx_G \bar{i} + dy_G \bar{j})$$

$$\bar{u} = \cos\theta\, \bar{i} + \sin\theta\, \bar{j}$$

$$dU_{F_1} = 2mg\,(dx_G \cos\theta + dy_G \sin\theta)$$

$$\begin{cases} x_G = x_H - R\sin\theta = s\cos\theta - R\sin\theta \\ y_G = y_H + R\cos\theta = s\sin\theta + R\cos\theta \end{cases}$$

$$dx_G = ds\cos\theta - \sin\theta\, s\, d\theta - R\cos\theta\, d\theta$$

$$dy_G = ds\sin\theta + s\cos\theta\, d\theta - R\sin\theta\, d\theta$$

$$dU_{F_1} = 2mg\,(\cos^2\theta\, ds - s\sin\theta\cos\theta\, d\theta - R\cos^2\theta\, d\theta + \sin^2\theta\, ds + s\sin\theta\cos\theta\, d\theta - R\sin^2\theta\, d\theta)$$

$$= 2mg\,(ds - R\,d\theta) \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_{F_1} = 2mgs - 2mgR\theta + c$$

oppure

$$dG = \bar{v}_G\, dt$$

$$\bar{v}_G = \frac{d}{dt}(G-O) \quad \text{ma } (G-O) = (G-H) + (H-O) = R\bar{h} + s\bar{u}$$

$$\bar{v}_G = R\frac{d}{dt}\bar{h} + \dot{s}\,\bar{u} + s\,\frac{d\bar{u}}{dt}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= \frac{d\bar{u}}{d\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\,\bar{h} \\ \frac{d\bar{h}}{dt} &= \frac{d\bar{h}}{d\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}\,\bar{u} \end{aligned}\right\} \text{vedi coord. polari}$$

$\Rightarrow \bar{v}_G = -R\dot{\theta}\bar{u} + \dot{s}\bar{u} + s\dot{\theta}\bar{h}$

$dL = \bar{F}_1 \cdot dG = \bar{F}_1 \cdot \bar{v}_G\, dt = 2mg\,\bar{u} \cdot [(\dot{s} - R\dot{\theta})\bar{u} + s\dot{\theta}\bar{h}]\, dt$

$= 2mg\,(ds - R\,d\theta)$ uguale a $(*)$

① $\mathcal{U} = -mg\,(s\sin\theta + R\cos\theta) - \frac{1}{2}ks^2 + 2mgs - 2mgR\theta + C$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial s} = -mg\sin\theta - ks + 2mg = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = -mg\,(s\cos\theta - R\sin\theta) - 2mgR = 0 \end{cases}$$

Dalla 1^a: $s = \frac{mg}{k}(2 - \sin\theta) = \frac{R}{\alpha}(2 - \sin\theta)$

sostituito nella 2^a:

$\frac{mg}{k}(2 - \sin\theta)\cos\theta - R\sin\theta + 2R = 0$

$\frac{R}{\alpha}(2 - \sin\theta)\cos\theta + R(2 - \sin\theta) = 0$

$\underset{\neq 0}{(2 - \sin\theta)}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\cos\theta\right) = 0 \Rightarrow \cos\theta = -\alpha < 0$

$-1 \leq \cos\theta < 0$

$\Downarrow$

$0 < \alpha \leq 1$

$\bar{\theta} = \arccos(-\alpha)$

$\theta_1 = \bar{\theta}\ ,\ \theta_2 = 2\pi - \bar{\theta}\quad \exists$ se $0 < \alpha \leq 1$

$s_1 = \frac{R}{\alpha}(2 - \sin\theta_1)\ ;\ s_2 = \frac{R}{\alpha}(2 - \sin\theta_2)$

② $(s_1, \theta_1); (s_2, \theta_2)\ \exists$ se $0 < \alpha \leq 1$

Energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T'$$

$$\bar{v}_G = (\dot{s} - R\dot{\theta})\bar{u} + s\dot{\theta}\bar{h}'$$

$$v_G^2 = (\dot{s} - R\dot{\theta})^2 + s^2\dot{\theta}^2$$

$$T' = \frac{1}{2} I_{Gz} \omega_D^2 \quad , \quad I_{Gz} = \frac{mR^2}{2} \quad , \omega_D^2 = \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{s}}{R}\right)^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \left[(\dot{s} - R\dot{\theta})^2 + s^2\dot{\theta}^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \frac{(R\dot{\theta} - \dot{s})^2}{R^2}$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\frac{3}{2} (\dot{s} - R\dot{\theta})^2 + s^2\dot{\theta}^2 \right]$$

3 $$T = \frac{1}{2} m \left[\frac{3}{2} \dot{s}^2 - 3R\dot{s}\dot{\theta} + \left(s^2 + \frac{3}{2} R^2\right)\dot{\theta}^2 \right]$$

Reazione vincolare all'equilibrio in H.

$$\bar{\Phi}_H = \Phi_{HX}\bar{i} + \Phi_{HY}\bar{j}$$

$$-k(G-O) + m\bar{g} + \bar{F}_1 + \bar{\Phi}_H = \bar{0}$$

è conveniente proiettare questa equazione nel riferimento Ouh solidale con la retta r.

lungo u : $-ks - mg\sin\theta + 2mg + \Phi_{Hu} = 0$

lungo h : $-mg\cos\theta - kR + \Phi_{Hh} = 0$

4 $$\begin{cases} \Phi_{Hu} = ks_e + mg\sin\theta_e - 2mg \\ \Phi_{Hh} = kR + mg\cos\theta_e \end{cases}$$

da valutare nelle due posizioni di equilibrio trovate.

STABILITÀ

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = -k < 0 \text{ sempre}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial s} = -mg\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mg(s\sin\theta + R\cos\theta)$$

$$|\mathcal{H}| = -kmg(s\sin\theta + R\cos\theta) - m^2g^2\cos^2\theta > 0$$

$$\frac{\alpha mg}{R} \cdot mg(s\sin\theta + R\cos\theta) + m^2g^2\cos^2\theta < 0$$

$$\alpha(s\sin\theta + R\cos\theta) + R\cos^2\theta < 0$$

all'equilibrio $\cos\theta = -\alpha$

$$\alpha(\bar{s}\sin\bar{\theta} - R\alpha) + R\alpha^2 < 0$$

$$\bar{s}\sin\bar{\theta} < 0$$

ma $\bar{s} > 0$ sempre $\Rightarrow \sin\bar{\theta} < 0$ θ_1 NO INSTABILE

θ_2 sì STABILE