Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Calcolo vettoriale

Maria Grazia Naso

naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

- Riferimento bibliografico: ad es.

Appendice A. Calcolo vettoriale

del testo consigliato

> M. Fabrizio, *Elementi di Meccanica Classica*, Zanichelli editore, Bologna, 2002.

Operazioni sui vettori

Esercizio 1. Nel riferimento ortogonale Oxy si determini graficamente ed analiticamente la *somma* dei seguenti vettori

$$(P-O) = -\,10\,\cos\frac{\pi}{4}\,\vec{\imath} + 10\,\cos\frac{\pi}{4}\,\vec{\jmath}$$

$$(Q-P) = 20\,\cos\frac{\pi}{6}\,\vec{\imath} + 20\,\sin\frac{\pi}{6}\,\vec{\jmath}$$

$$(S-Q) = -\,35\,\vec{\jmath}.$$

Risoluzione. Il risultante è

$$\vec{R} = (P-O) + (Q-P) + (S-Q) = (S-O)$$

$$= \left(10\sqrt{3} - 5\sqrt{2}\right)\vec{\imath} + \left(5\sqrt{2} - 25\right)\vec{\jmath}.$$

Il suo modulo è $R = \sqrt{\left(10\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)^2 + \left(5\sqrt{2}-25\right)^2}$ e la sua direzione dipende, ad es., dall'angolo $x^+\widehat{O}S = \arctan\frac{5\sqrt{2}-25}{10\sqrt{3}-5\sqrt{2}}$. $\square$

Prodotto scalare

Esercizio 2. Nel riferimento ortogonale $Oxyz$, calcolare i seguenti prodotti scalari:

(a) $\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}$; (b) $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}$;

(c) $\vec{k}\cdot\vec{\jmath}$; (d) $(-\vec{\imath}+2\vec{\jmath})\cdot(3\vec{\jmath}+\vec{k})$.

[1 ; 0 ; 0 ; 6]

Esercizio 3. Nel riferimento ortogonale $Oxyz$, si considerino $(A-O)=a_1\,\vec{\imath}+a_2\,\vec{\jmath}+a_3\,\vec{k}$ e $(B-O)=b_1\,\vec{\imath}+b_2\,\vec{\jmath}+b_3\,\vec{k}$. Si dimostri che

$$\boxed{(A-O)\cdot(B-O)=\sum_{h=1}^{3}a_h\,b_h}\,.$$

Esercizio 4. Nel riferimento ortogonale $Oxyz$, si consideri $(A-O)=a_1\,\vec{\imath}+a_2\,\vec{\jmath}+a_3\,\vec{k}$. Si dimostri che

$$\boxed{|A-O|=\sqrt{\sum_{h=1}^{3}a_h^2}}\,.$$

Prodotto vettoriale

Esercizio 5. Nel riferimento ortogonale $Oxyz$, si considerino $(A-O) = 3\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\,\vec{k}$ e $(B-O) = 2\,\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath} - \vec{k}$. Si calcoli $(A-O)\times(B-O)$.

$$[-5\,\vec{\imath} + 7\,\vec{\jmath} + 11\,\vec{k}]$$

Esercizio 6. Nel riferimento ortogonale $Oxyz$, si considerino $(A-O) = 2\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ e $(B-O) = \vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} - 3\,\vec{k}$. Si calcoli $|\,[2(A-O)+(B-O)]\times[(A-O)-2(B-O)]\,|$.

$$[25\sqrt{3}]$$

Esercizio 7. Nel riferimento ortogonale $Oxyz$, si calcoli il versore perpendicolare al piano dei vettori $(A-O) = 3\,\vec{\imath} - 2\,\vec{\jmath} + 4\,\vec{k}$ e $(B-O) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\,\vec{k}$.

$$\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2\,\vec{\jmath} + \vec{k})\right]$$

Prodotto misto

Esercizio 8. Nel riferimento ortogonale $Oxyz$, si considerino $(A-O) = 3\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $(B-O) = \vec{\jmath} + 2\,\vec{k}$ e $(C-O) = \vec{\imath} + 5\,\vec{\jmath} + 4\,\vec{k}$. Si calcolino

$$(A-O)\cdot(B-O)\times(C-O) \quad \text{e} \quad (B-O)\cdot(A-O)\times(C-O).$$

$[-20\,;\ 20]$

Esercizio 9. Nel riferimento ortogonale $Oxyz$, si considerino $(A-O) = 2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\,\vec{k}$, $(B-O) = \vec{\imath} - 2\,\vec{\jmath} + \vec{k}$ e $(C-O) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\,\vec{k}$. Si calcolino

$$(A-O)\cdot(B-O)\times(C-O)$$
$$(C-O)\cdot(A-O)\times(B-O)$$
$$(A-O)\times(B-O)\cdot(C-O).$$

$[20\,;\ 20\,;\ 20]$

Doppio prodotto vettoriale

Esercizio 10. Nel riferimento ortogonale $Oxyz$, si considerino $(A-O) = 2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\,\vec{k}$, $(B-O) = \vec{\imath} - 2\,\vec{\jmath} + \vec{k}$ e $(C-O) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\,\vec{k}$. Si calcolino

$$(A-O) \times [(B-O) \times (C-O)]$$
$$[(A-O) \times (B-O)] \times (C-O).$$

$$[8\,\vec{\imath} - 19\,\vec{\jmath} - \vec{k}\,;\ 25\,\vec{\imath} - 15\,\vec{\jmath} - 10\,\vec{k}]$$

Esercizio 11. Dati tre vettori arbitrari $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$, dimostrare che esiste la proprietà ciclica di Jacobi:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}\,.$$