Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Vettori applicati

Maria Grazia Naso

naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

- Riferimento bibliografico: ad es.

Appendice B. Vettori applicati

del testo consigliato

M. Fabrizio, *Elementi di Meccanica Classica*, Zanichelli editore, Bologna, 2002.

Esercizio 1. Dato il seguente sistema $\sum$ di tre vettori applicati

$$(A_1, \vec{v}_1)\,, \quad (A_2, \vec{v}_2)\,, \quad (A_3, \vec{v}_3)$$

nel riferimento $Oxyz$:

$$\begin{array}{ll} A_1(1,0,0) & \vec{v}_1(0,0,1) \\ A_2(1,1,1) & \vec{v}_2(-1,-1,0) \\ A_3(1,1,0) & \vec{v}_3(1,0,-1)\,, \end{array}$$

determinare il modulo del momento, di tale sistema, calcolato rispetto ai punti dell'asse centrale.

A 1 **B** 2 **C** 0 **D** 3.

Risoluzione.

1. calcoliamo il risultante del sistema $\sum$:

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{3} \vec{v}_i} = (0, -1, 0) \,.$$

2. calcoliamo il momento risultante $\vec{M}_O$ rispetto al polo O

$$\boxed{\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{3} (A_i - O) \times \vec{v}_i} = (0, -1, -1) \,.$$

3. determiniamo l' invariante scalare

$$\boxed{I = \vec{R} \cdot \vec{M}_O} = 1 \neq 0 \,.$$

4. Sia $O' \in$ a.c.: $(O' - O) = \lambda \vec{R} + \dfrac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$\begin{aligned}\vec{M}_{O'} =& \vec{M}_O + \vec{R} \times \left(\lambda \vec{R} + \frac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2} \right) \\ =& \vec{M}_O - \frac{1}{R^2} \left[\left(\vec{R} \cdot \vec{R} \right) \vec{M}_O - \left(\vec{R} \cdot \vec{M}_O \right) \vec{R} \right] \\ =& \frac{I}{R} \ \mathrm{vers}(\vec{R}) \,.\end{aligned}$$

Calcoliamo quindi il modulo del momento risultante $\vec{M}_{O'}$ rispetto ad un punto O' dell'asse centrale

$$|\vec{M}_{O'}| = \frac{|I|}{|\vec{R}|} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textsf{A}}.$$

Esercizio 2. Dato il seguente sistema $\sum$ di tre vettori applicati $(A_1, \vec{v}_1)$, $(A_2, \vec{v}_2)$, $(A_3, \vec{v}_3)$, nel riferimento $Oxyz$:

$$\begin{array}{lll} A_1(1,0,0) & A_2(0,0,2) & A_3(1,1,0) \\ \vec{v}_1(1,1,0) & \vec{v}_2(0,0,1) & \vec{v}_3\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \end{array},$$

determinare

(a) il vettore risultante $\vec{R}$.

(b) il momento risultante $\vec{M}_O$ rispetto al polo O.

(c) l'invariante scalare I.

(d) l'equazione cartesiana dell'asse centrale.

(e) il modulo del momento risultante $\vec{M}_{O'}$ calcolato rispetto ad un punto O' dell'asse centrale.

Risoluzione.

(a) $\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{3} \vec{v}_i} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

(b) $\boxed{\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{3} (A_i - O) \times \vec{v}_i} = \vec{0}$.

(c) $\boxed{I = \vec{R} \cdot \vec{M}_O} = 0$.

(d) Poiché $(O' - O) = \lambda \, \vec{R} + \dfrac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, l'equazione dell'asse centrale

- in forma vettoriale: $(x, y, z) = \lambda \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\,\lambda \\[2ex] y = \dfrac{1}{2}\,\lambda \\[2ex] z = \lambda\,. \end{cases}$$

- in forma cartesiana: $\frac{2}{3}\,x = 2\,y = z$.

(e) $|\vec{M}_{O'}| = 0$, $O' \in$ asse centrale.

Esercizio 3. Dato il seguente sistema $\sum$ di tre vettori applicati $(A_1, \vec{v}_1)$, $(A_2, \vec{v}_2)$, $(A_3, \vec{v}_3)$, nel riferimento $Oxyz$:

$$A_1(2,0,0) \quad A_2(0,0,2) \quad A_3(0,1,0)$$
$$\vec{v}_1(1,0,0) \quad \vec{v}_2(1,0,1) \quad \vec{v}_3\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right),$$

determinare

(a) l'equazione cartesiana dell'asse centrale.

(b) il modulo del momento risultante $\vec{M}_{O'}$ calcolato rispetto ad un punto O' dell'asse centrale.

(c) i valori dei parametri α e β affinché il punto $P\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{6}, \beta\right)$ appartenga all'asse centrale.

Risoluzione.

(a)

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{3} \vec{v}_i = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{15}{2}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{3} (A_i - O) \times \vec{v}_i = \left(0, 2, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{R} \times \vec{M}_O = \left(-\frac{7}{4}, \frac{5}{4}, 5\right) .$$

Poiché $(O' - O) = \lambda\, \vec{R} + \dfrac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, l'equazione dell'asse centrale

- in forma vettoriale:
$(x,y,z) = \lambda \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) + \frac{2}{15} \left(-\frac{7}{4}, \frac{5}{4}, 5 \right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{7}{30} + \dfrac{5}{2}\,\lambda \\[2ex] y = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}\,\lambda \\[2ex] z = \dfrac{2}{3} + \lambda\,. \end{cases}$$

- in forma cartesiana: $\frac{2}{5} \left(x + \frac{7}{30} \right) = 2 \left(\frac{1}{6} - y \right) = z - \frac{2}{3}$.

(b) $I = \vec{R} \cdot \vec{M}_O = -\frac{3}{2}$, $|\vec{M}_{O'}| = \frac{|I|}{|\vec{R}|} = \sqrt{\frac{3}{10}}$, $O' \in$ asse centrale.

(c) Poiché $P\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{6}, \beta\right)$ e considerando l'equazione dell'asse centrale in forma cartesiana:

$$\frac{2}{5}\left(x + \frac{7}{30}\right) = 2\left(\frac{1}{6} - y\right) = z - \frac{2}{3},$$

si ha

$$\frac{2}{5}\left(\alpha + \frac{7}{30}\right) = 2\left(\frac{1}{6} - \alpha - \frac{1}{6}\right) = \beta - \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow \alpha = -\dfrac{7}{180}$ e $\beta = \dfrac{67}{90}$.

Esercizio 4. Dato il seguente sistema $\sum$ di tre vettori applicati $(A_1, \vec{v}_1)$, $(A_2, \vec{v}_2)$, $(A_3, \vec{v}_3)$, *nel piano* Oxy:

$$\begin{array}{lll} A_1(5,-2) & A_2(3,0) & A_3(1,-3) \\ \vec{v}_1(1,1) & \vec{v}_2(3,-4) & \vec{v}_3(-2,6)\,, \end{array}$$

determinare

(a) l'equazione cartesiana dell'asse centrale.

(b) il modulo del momento risultante $\vec{M}_{O'}$ calcolato rispetto ad un punto O' dell'asse centrale.

Risoluzione. Nel riferimento $Oxyz$:

(a) $\vec{R} = (2,3,0) \neq \vec{0}$, $\vec{M}_O = (0,0,-5) \Rightarrow \vec{R} \perp \vec{M}_O \Rightarrow I = 0$. Inoltre $\vec{R} \times \vec{M}_O = (-15,10,0)$ e $R^2 = 13$.

- in forma vettoriale:
  $(x, y, z) = \lambda\,(2, 3, 0) + \dfrac{1}{13}\,(-15, 10, 0),\ \lambda \in \mathbb{R}.$
- in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{15}{13} + 2\,\lambda \\[2ex] y = \dfrac{10}{13} + 3\,\lambda \\[2ex] z = 0\,. \end{cases}$$

- in forma cartesiana: $\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{15}{13}\right) = \dfrac{1}{3}\left(y - \dfrac{10}{13}\right),\ z = 0.$

(b) $I = \vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0,\ |\vec{M}_{O'}| = \dfrac{|I|}{|\vec{R}|} = 0,\ O' \in$ asse centrale.

Esercizio 5. Stabilire quale dei seguenti punti

$$A\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\,,\quad B\left(1,\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)\,,\quad C\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\,,\quad D\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right)\,,$$

appartiene all'asse centrale del sistema $\sum$ di tre vettori applicati $(A_i,\vec{v}_i)$, $i=1,2,3$, nel riferimento $Oxyz$:

$$\begin{array}{lll} A_1(1,0,0) & A_2(0,1,0) & A_3(0,0,1) \\ \vec{v}_1(1,0,0) & \vec{v}_2(0,2,0) & \vec{v}_3(0,-1,1)\,. \end{array}$$

Risoluzione.

$$\vec{R}=(1,1,1)\,,\qquad R^2=3$$

$$\vec{M}_O=(1,0,0)\,,\quad \vec{R}\times\vec{M}_O=(1,1,1)\times(1,0,0)=(0,1,-1)\,.$$

Poiché $(O' - O) = \lambda\,\vec{R} + \dfrac{\vec{R}\times\vec{M}_O}{R^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, si trova l'equazione dell'asse centrale

- in forma vettoriale: $(x, y, z) = \lambda\,(1, 1, 1) + \dfrac{1}{3}\,(0, 1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = \lambda \\[2ex] y = \dfrac{1}{3} + \lambda \\[2ex] z = -\dfrac{1}{3} + \lambda\,. \end{cases}$$

- in forma cartesiana: $x = y - \dfrac{1}{3} = z + \dfrac{1}{3} \Rightarrow D \in$ a. c. .

Sistemi di vettori applicati equivalenti

Tabella di massima riduzione

$I = 0$	$\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_O = \vec{0}$	zero
	$\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$	coppia di momento $\vec{M}_O$
	$\vec{R} \neq \vec{0}$	vettore $\vec{R}$ applicato in un qualsiasi punto dell'a.c.
$I \neq 0$	vettore $\vec{R}$ applicato in un qualsiasi polo O $+$ coppia di momento $\vec{M}_O$	

Esercizio 6. Determinare un sistema di vettori applicati equivalente al seguente sistema $\sum = \{(A_i, \vec{v}_i),\ i = 1, 2, 3\}$, nel riferimento $Oxyz$:

$$A_1(1, 0, 1) \quad A_2(0, 1, 1) \quad A_3(1, 1, 0)$$
$$\vec{v}_1(1, -1, 0) \quad \vec{v}_2(0, 1, -1) \quad \vec{v}_3(-1, 0, 1)\,.$$

Risoluzione. $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow I = \vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$. Dalla legge di variazione dei momenti

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \underbrace{\vec{R}}_{=\vec{0}} \times (O' - O) = \vec{M}_O$$

$\Rightarrow$ il momento risultante è indipendente dalla scelta del polo $\Rightarrow$ scegliamo $O \equiv A_1$.

$$\boxed{\vec{M}_{A_1} = \sum_{i=1}^{3} (A_i - A_1) \times \vec{v}_i} = \vec{0}\,.$$

$\Rightarrow \sum \approx$ *zero*.

Esercizio 7. Considerato il sistema $\sum = \{(A_i, \vec{v}_i),\ i = 1, 2, 3\}$, nel riferimento $Oxyz$:

$$\begin{array}{lll} A_1(1,0,0) & A_2(0,1,0) & A_3(0,0,1) \\ \vec{v}_1(0,0,1) & \vec{v}_2(-1,0,-1) & \vec{v}_3(1,-1,0)\,, \end{array}$$

si chiede di

(a) stabilirne la massima riduzione.

(b) determinare le coordinate di un generico punto $\in$ a.c. .

Risoluzione.

(a) $\vec{R} = (0, -1, 0) \neq \vec{0}$, $\vec{M}_O = (0, 0, 1) \Rightarrow I = \vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$. Essendo $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $I = 0$, esiste $O' \in$ a.c. tale che $\vec{M}_{O'} = \vec{0} \Rightarrow$ $\sum \approx (O', \vec{R})$

(b) possiamo scegliere fra i seguenti due metodi:

- determinare l'equazione vettoriale dell'a.c. .
- applicare la legge di variazione del momento risultante:

$$\underbrace{\vec{M}_{O'}}_{=\vec{0}} = \underbrace{\vec{M}_O}_{=(0,0,1)} + \underbrace{\vec{R}}_{=(0,-1,0)} \times \underbrace{(O' - O)}_{=(x,y,z)}, \quad O'(x, y, z) \in \text{a.c.}.$$

$$\Rightarrow (0, 0, 0) = (-z, 0, x + 1) \Rightarrow O'(-1, \lambda, 0),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 8. Stabilire la massima riduzione del seguente sistema $\sum = \{(A_i, \vec{v}_i),\ i = 1, 2, 3\}$, nel riferimento $Oxyz$:

$$A_1(2, 0, -2) \quad A_2(0, 1, -1) \quad A_3(-1, 0, 0)$$
$$\vec{v}_1(1, 0, -1) \quad \vec{v}_2(0, 2, 1) \quad \vec{v}_3(-1, -2, 0)\,,$$

Risoluzione. $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow$ dalla legge di variazione del momento risultante

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \underbrace{\vec{R}}_{=\vec{0}} \times (O' - O) = \vec{M}_O$$

$\Rightarrow$ il momento risultante è indipendente dalla scelta del polo $\Rightarrow$ scegliamo $O \equiv A_1$. Quindi

$$\boxed{\vec{M}_{A_1} = \sum_{i=1}^{3} (A_i - A_1) \times \vec{v}_i} = (3,0,2) \Rightarrow \sum \approx \text{ad una } \textit{coppia} \text{ di}$$

momento $\vec{M} = (3,0,2)$.

Esercizio 9. Considerato il sistema $\sum = \{(A_i, \vec{v}_i),\ i = 1,2,3\}$, nel riferimento $Oxyz$:

$$A_1(2,0,0) \quad A_2(1,-1,2) \quad A_3(0,1,0)$$

$$\vec{v}_1(3,0,0) \quad \vec{v}_2(-2,0,1) \quad \vec{v}_3(-1,1,1)\,,$$

si chiede di

(a) stabilirne la massima riduzione.

(b) determinare il modulo del momento risultante rispetto ad un punto dell'a.c. .

Risoluzione.

1. $\vec{R} = (0,1,2)$, $\vec{M}_O = (0,-5,-1) \Rightarrow I = \vec{R} \cdot \vec{M}_O = -7 \neq 0 \Rightarrow$ il sistema $\sum$ di v.a. $\approx$ v.a. $+$ coppia.
2. $|\vec{M}_{O'}| = \dfrac{|I|}{|\vec{R}|} = \dfrac{7}{\sqrt{5}}$.

Esercizio 10. Dato il seguente sistema $\sum = \{(A_i, \vec{v}_i),\ i = 1,2,3\}$, nel riferimento $Oxyz$:

$$A_1(1,\alpha,0) \quad A_2(\alpha,0,1) \quad A_3(0,0,\alpha)$$
$$\vec{v}_1(\alpha,0,1) \quad \vec{v}_2(0,\alpha,1) \quad \vec{v}_3(1,1,0)\,,$$

determinare il valore del parametro α affinché (a) $I = -1$. (b) l'asse centrale passi per il punto $P\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Risoluzione.

(a) $\vec{R} = (\alpha+1, \alpha+1, 2)$, $\vec{M}_O = (-\alpha, -1, 0) \Rightarrow$
$I = -(\alpha+1)^2 = -1 \Rightarrow \alpha = 0$ o $\alpha = -2$.

(b) Essendo $\vec{R} \times \vec{M}_O = \big(2, -2\alpha, \alpha^2 - 1\big)$, $R^2 = 2(\alpha+1)^2 + 4$, l'equazione dell'asse centrale in forma parametrica è

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{(\alpha+1)^2+2} + (\alpha+1)\lambda \\ y = -\dfrac{\alpha}{(\alpha+1)^2+2} + (\alpha+1)\lambda \\ z = \dfrac{\alpha^2-1}{2(\alpha+1)^2+4} + 2\lambda\,. \end{cases}$$

$\nexists \alpha$ tale che $P \in$ a.c. .

Esercizio 11. Determinare il centro del seguente sistema di vettori applicati *paralleli e concordi* $\sum$

$$A_1(1,0,0) \qquad A_2(0,1,0) \qquad A_3(0,0,1)$$
$$\vec{v}_1\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) \quad \vec{v}_2\left(2,1,\frac{2}{3}\right) \quad \vec{v}_3\left(3,\frac{3}{2},1\right) \ .$$

Risoluzione. Poniamo $\vec{a} := \vec{v}_1$, $\vec{u} := \dfrac{\vec{a}}{a}$, $a = \dfrac{7}{6}$. Essendo $\vec{v}_1 = \vec{a} = \dfrac{7}{6}\vec{u}$, $\vec{v}_2 = 2\vec{a} = \dfrac{7}{3}\vec{u}$, $\vec{v}_3 = 3\vec{a} = \dfrac{7}{2}\vec{u}$, si ha $\vec{R} = 7\vec{u}$. Quindi

$$\boxed{(C-O) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{3} v_i(A_i - O)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{3} v_i}} = \left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right).$$

Esercizio 12. Determinare il centro del seguente sistema di vettori applicati *paralleli ma non concordi* $\sum$

$$A_1(1,0,0) \qquad A_2(0,1,1) \qquad A_3(0,0,1)$$
$$\vec{v}_1\,(6,4,-10) \quad \vec{v}_2\,(-3,-2,5) \quad \vec{v}_3\,(12,8,-20)\ .$$

Risoluzione. Sia ha $\vec{R} = (15, 10 - 25) \neq \vec{0}$. Poniamo $\vec{a} := (3,2,-5)$, $\vec{u} := \dfrac{\vec{a}}{a}$. Essendo $\vec{v}_1 = 2\vec{a} = 2a\vec{u}$, $\vec{v}_2 = -\vec{a} = -a\vec{u}$, $\vec{v}_3 = 4\vec{a} = 4a\vec{u}$, si ha $\vec{R} = 5a\vec{u}$. Quindi

$$\boxed{(C-O) = \frac{\sum_{i=1}^{3} v_i(A_i - O)}{\sum_{i=1}^{3} v_i}} = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right).$$