Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Vettori applicati e poligono funicolare

Maria Grazia Naso

naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

Poligono funicolare

Un sistema di vettori $\sum$ è *piano* se le rette di applicazione dei v.a. $(A_i, \vec{v}_i)$ appartengono ad uno stesso piano π.

Dato un sistema piano $\sum_\pi$, esiste un procedimento grafico, detto *poligono funicolare*, che permette di determinare, per via grafica, la riduzione di $\sum_\pi$

- ad un v.a. in un punto dell'a.c. (se $\vec{R} \neq \vec{0}$)

oppure

- ad una coppia (se $\vec{R} = \vec{0}$).

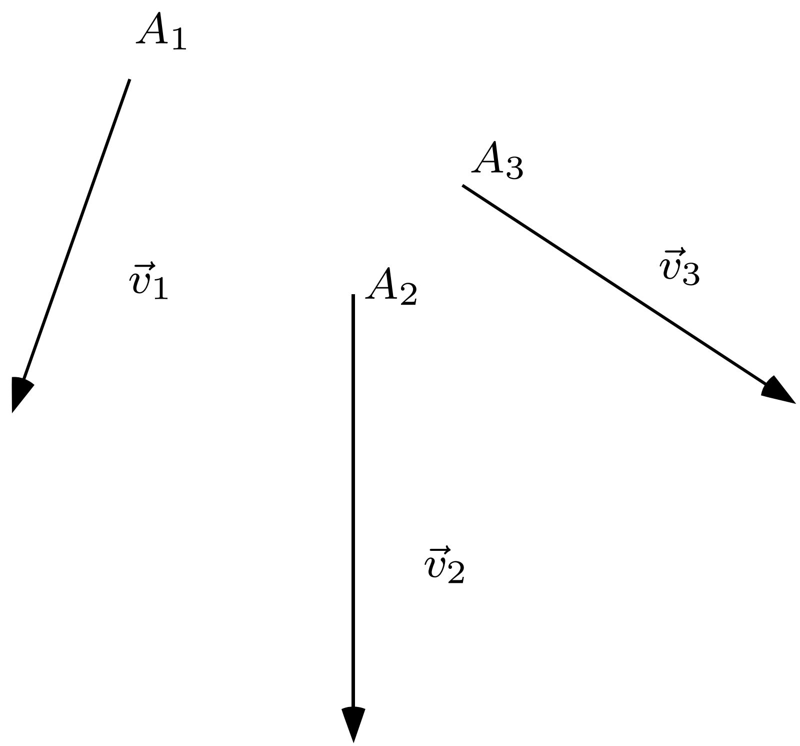
Preso un punto *arbitrario* $B_0 \in \pi$, si costruisce la poligonale dei vettori $\vec{v}_i$:

$$\vec{v}_1 := (B_1 - B_0),\ \vec{v}_2 := (B_2 - B_1),\ \ldots \vec{v}_n := (B_n - B_{n-1}).$$

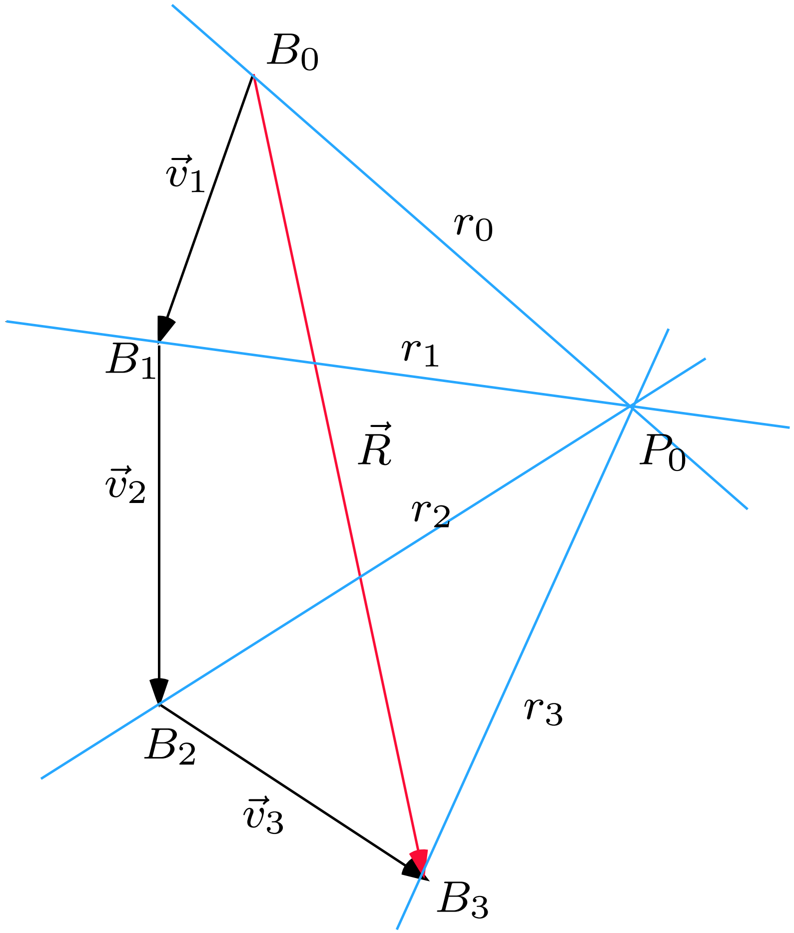
Sia $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i = (B_n - B_0)$.

- C.N.S. affinché $\vec{R} \equiv \vec{0}$ è che $B_n \equiv B_0$ (poligonale chiusa).

$\boxed{1^\circ \text{ caso}}$: $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $\sum_\pi = \{(A_i\,,\,\vec{v}_i),\ i = 1, \ldots, n\}$.
Ad esempio, scegliamo $n = 3$.



▶ Preso un punto $P_0 \in \pi$ *arbitrario ma non appartenente alla poligonale*, si unisca P_0 con i punti B_i, $i = 1, 2, 3$, individuando le rette r_i, $i = 1, 2, 3$.



▶ Preso un punto $C_0 \in \pi$, si disegni la retta $s_0 \parallel r_0$.

▶ La retta di azione del v.a. $(A_1, \vec{v}_1)$ incontra s_0 nel punto C_1. Da C_1 si conduca la retta $s_1 \parallel r_1$.

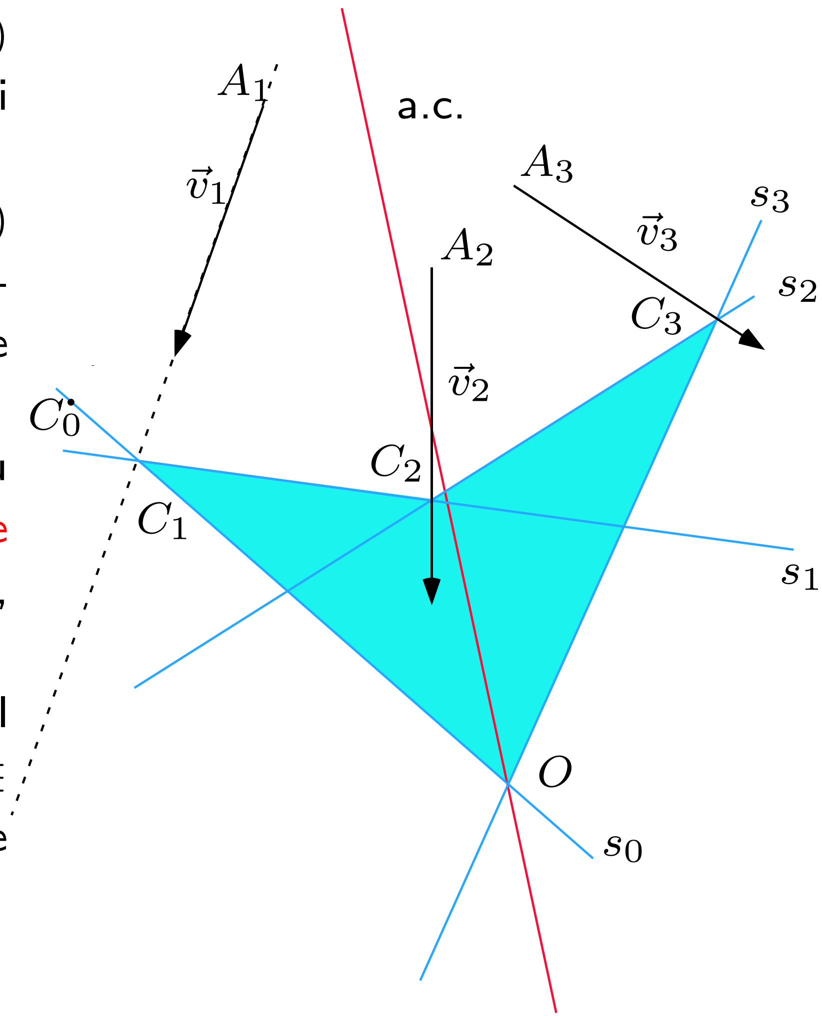
▶ La retta di azione del v.a. $(A_2, \vec{v}_2)$ incontra s_1 nel punto C_2. Da C_2 si conduca la retta $s_2 \parallel r_2 \ldots$ e così si prosegue per tutti i restanti v.a. .

▶ La poligonale con i lati individuati su s_0, s_1, . . ., s_n è detta poligono funicolare di $\sum_\pi$, relativo ai tre punti arbitrari B_0, P_0, C_0.

L'intersezione tra le rette s_0 ed s_n (nel nostro esempio $n = 3$) è un punto $O \in$ asse centrale (retta passante per O e parallela ad $\vec{R} = (B_n - B_0)$).

▶ Quindi $\boxed{\sum_\pi \approx (O, \vec{R})}$.

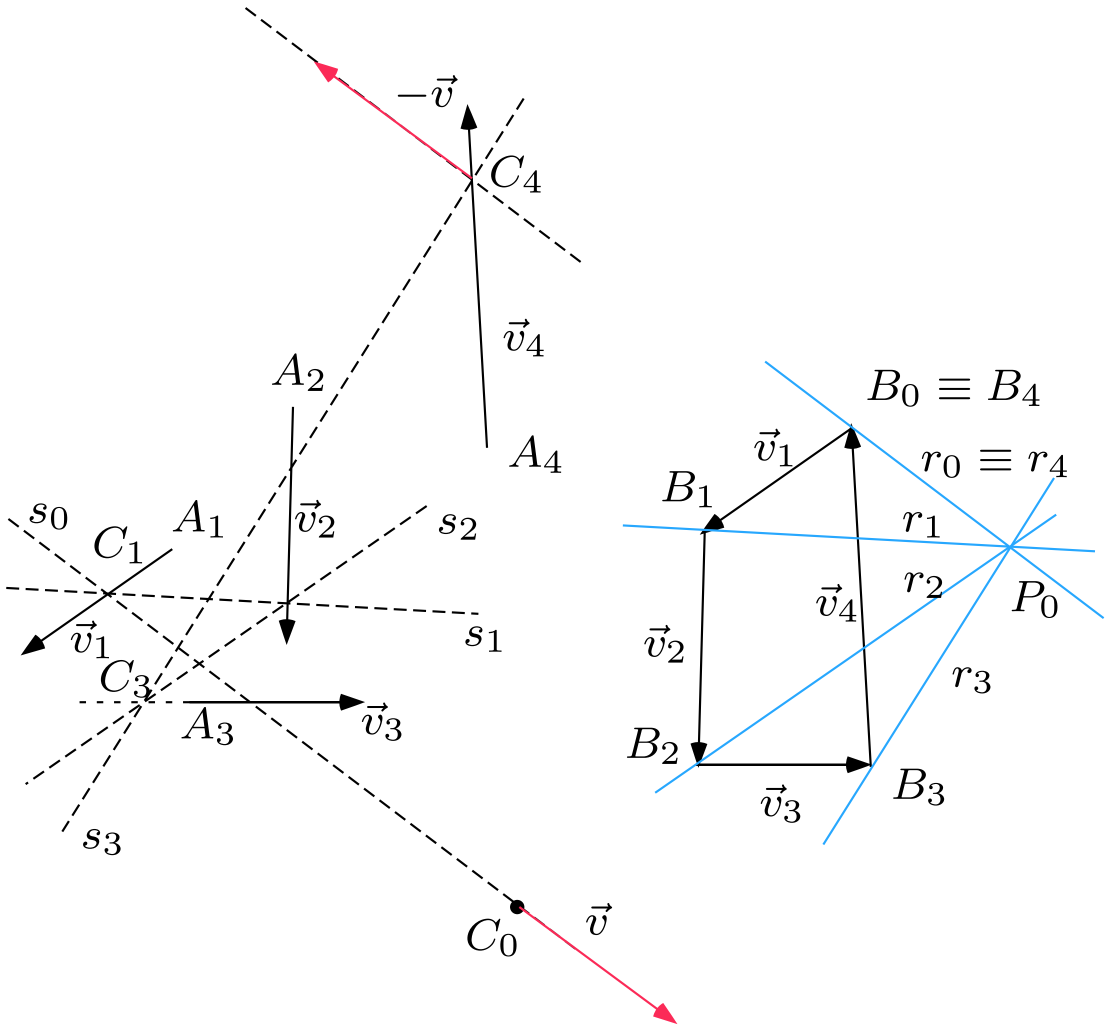
▷ Poiché l'a.c. è unico, scelti *altri tre punti* B'_0, P'_0, C'_0, il vertice $O' = s_0 \cap s_n \in$ a.c. .



$\boxed{2^\circ \text{ caso}}$: $\vec{R} = \vec{0}$. Allora la poligonale $B_0 B_n$ è chiusa.

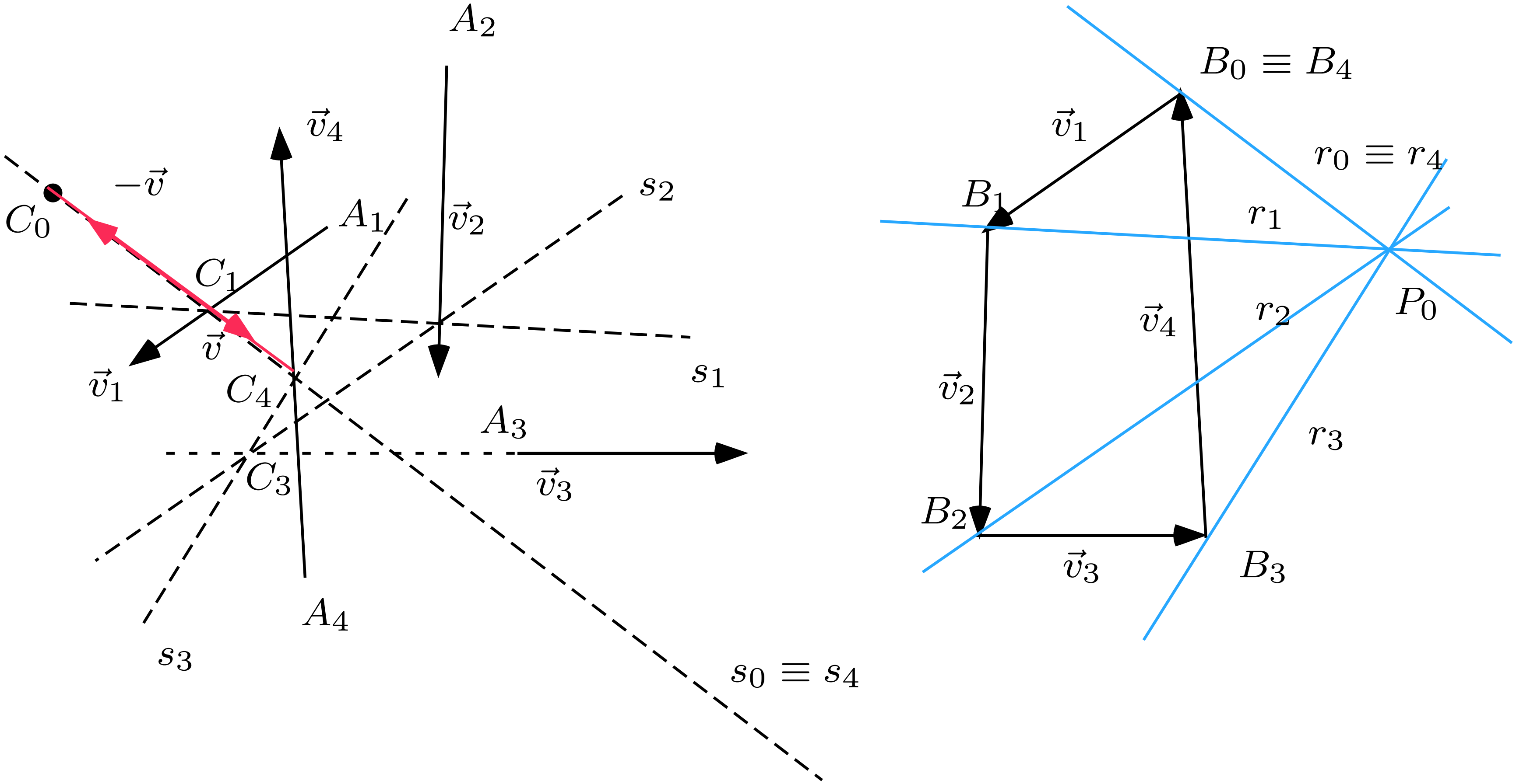
$\boxed{\sum_\pi} = \{(A_i\,,\,\vec{v}_i),\ i = 1, \ldots, n\}$ $\boxed{\approx \text{coppia di momento } \vec{M}_O \neq \vec{0}}$.

Ad esempio, scegliamo $n = 4$. Applichiamo la procedura considerata nel 1° caso. Si ottiene: $s_0 \parallel s_n$ e quindi $s_0 \cap s_n = \emptyset$, $n = 4$. Pertanto $\sum_\pi \approx$ coppia $(C_0, \vec{v})$, $(C_4, -\vec{v})$, con $\vec{v} = (P_0 - B_0)$ e $-\vec{v} = (B_4 - P_0) = (B_0 - P_0)$.



$\boxed{3^\circ \text{ caso}}$: $\vec{R} = \vec{0}$. Allora la poligonale $B_0 B_n$ è chiusa.

$\boxed{\sum_\pi} = \{(A_i\,,\, \vec{v}_i),\ i = 1, \ldots, n\}$ $\boxed{\approx \text{zero (ad es. coppia di braccio nullo)}}$. Ad esempio, scegliamo $n = 4$. Applichiamo la procedura considerata nel 1° caso. Si ottiene: $s_0 \equiv s_n$, $n = 4$. Quindi $\vec{M}_0 = \vec{0}$. Pertanto $\sum_\pi \approx$ zero (ad es. coppia di braccio nullo : $(C_0, \vec{v})$, $(C_4, -\vec{v})$, con $\vec{v} = (P_0 - B_0)$).



ESERCIZI

Esercizio 1. Nel riferimento ortogonale $Oxyz$, si consideri il sistema $\sum_\pi = \{(A_i\,,\,\vec{v}_i),\ i = 1,\ldots,3\}$ di v.a.:

$$\begin{array}{lll} A_1(1,1,0), & A_2(4,2,0), & A_3(3,4,0), \\ \vec{v}_1 = (1,1,0), & \vec{v}_2 = (2,0,0), & \vec{v}_3 = (0,-1,0), \end{array}$$

e se ne determini l'equazione dell'asse centrale.

$[3y = 7,\ z = 0]$

Esercizio 2. *Nel piano* Oxy, si consideri il sistema $\sum_\pi = \{(A_i\,,\,\vec{v}_i),\ i = 1,\ldots,4\}$ di v.a.:

$$\begin{array}{llll} A_1(-2,3), & A_2(1,4), & A_3(8,3), & A_4(9,5), \\ \vec{v}_1 = (-2,3), & \vec{v}_2 = (3,3), & \vec{v}_3 = (-9,0), & \vec{v}_4 = (8,-6), \end{array}$$

e se ne stabilisca la riducibilità.

[coppia di momento $\vec{M}_O \neq \vec{0}$]

Esercizio 3. *Nel piano Oxy*, si consideri il sistema $\sum_{\pi} = \{(A_i\ ,\ \vec{v}_i),\ i = 1, \ldots, 3\}$ di v.a.:

$$A_1(1,2), \qquad A_2(1,-3), \qquad A_3(4,-5),$$
$$\vec{v}_1 = (1,0), \quad \vec{v}_2 = (1,-3), \quad \vec{v}_3 = (-2,3),$$

e se ne stabilisca la riducibilità.

[zero]

Risoluzione

Esercizio 1.
<u>Algebricamente</u>:

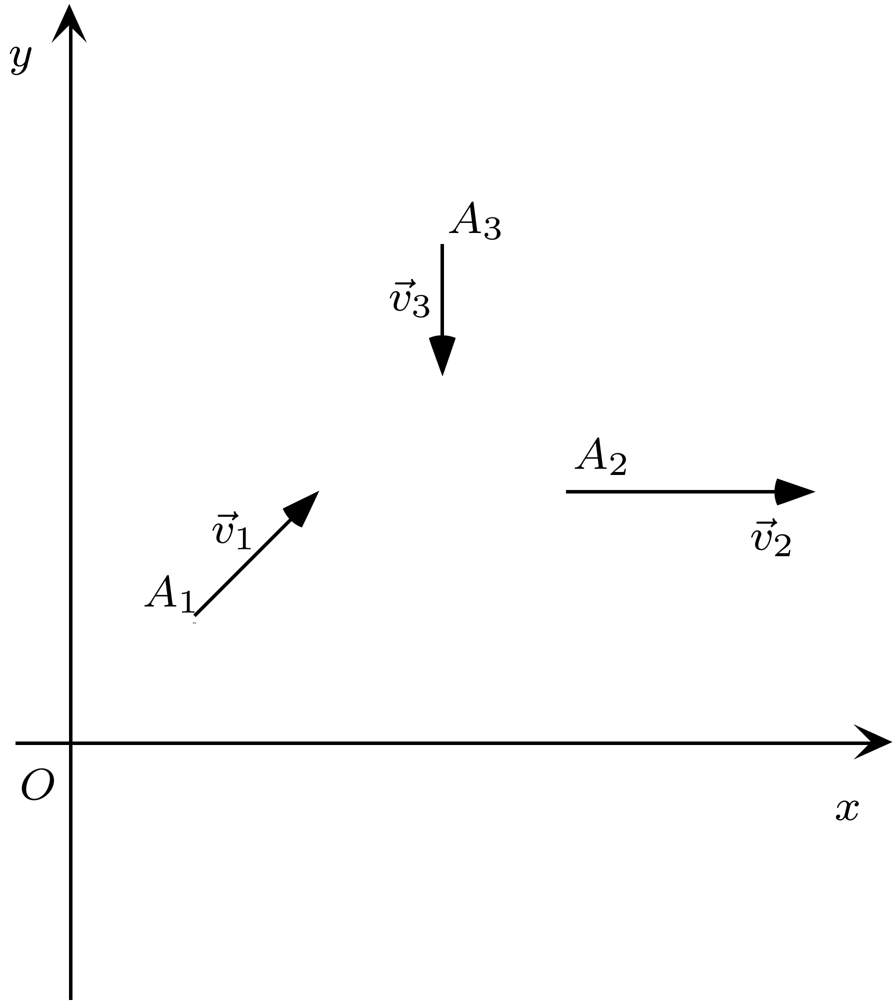
$$\begin{aligned} \vec{R} =& (3,0,0) \neq \vec{0}, \quad R^2 = 9 \\ \vec{M}_O =& (0,0,-7) \neq \vec{0} \\ \vec{R} \times \vec{M}_O =& (0,21,0)\,. \end{aligned}$$

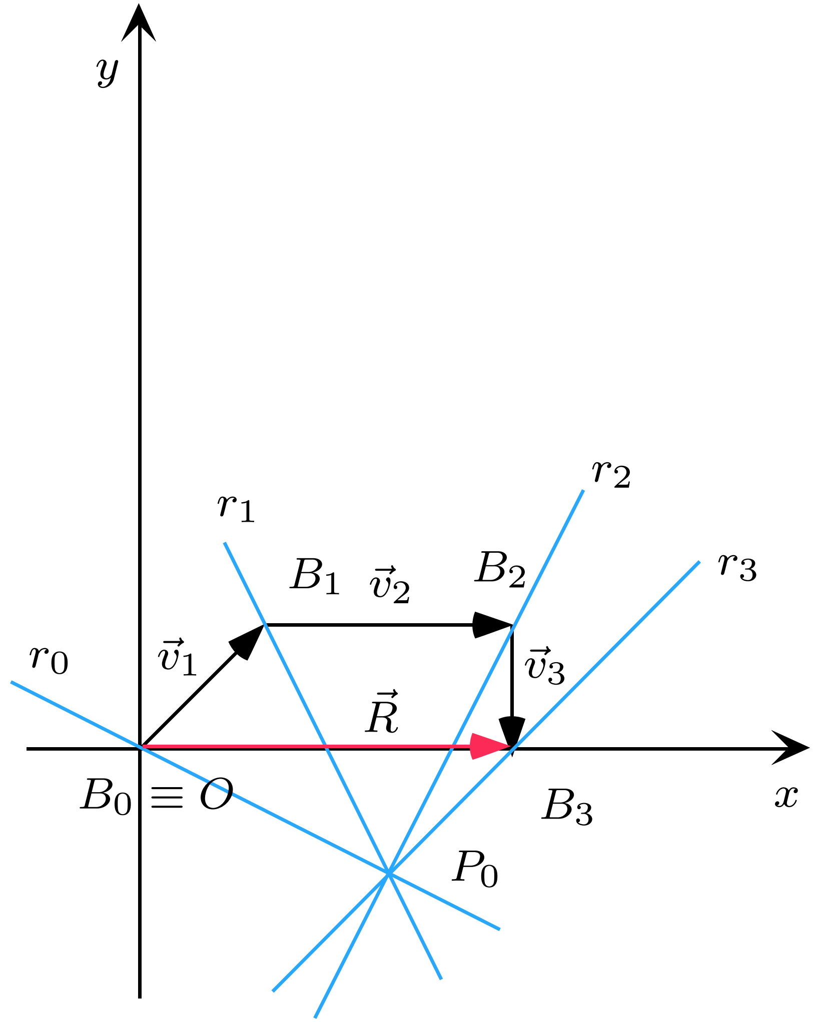
Sia $O'(x,y,z) \in$ a.c. : $(x,y,z) = \dfrac{1}{9}\,(0,21,0) + \lambda\,(3,0,0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pertanto l'asse centrale è individuato da

$$\begin{cases} x = 3\,\lambda \\ y = \dfrac{7}{3} \\ z = 0\,. \end{cases}$$

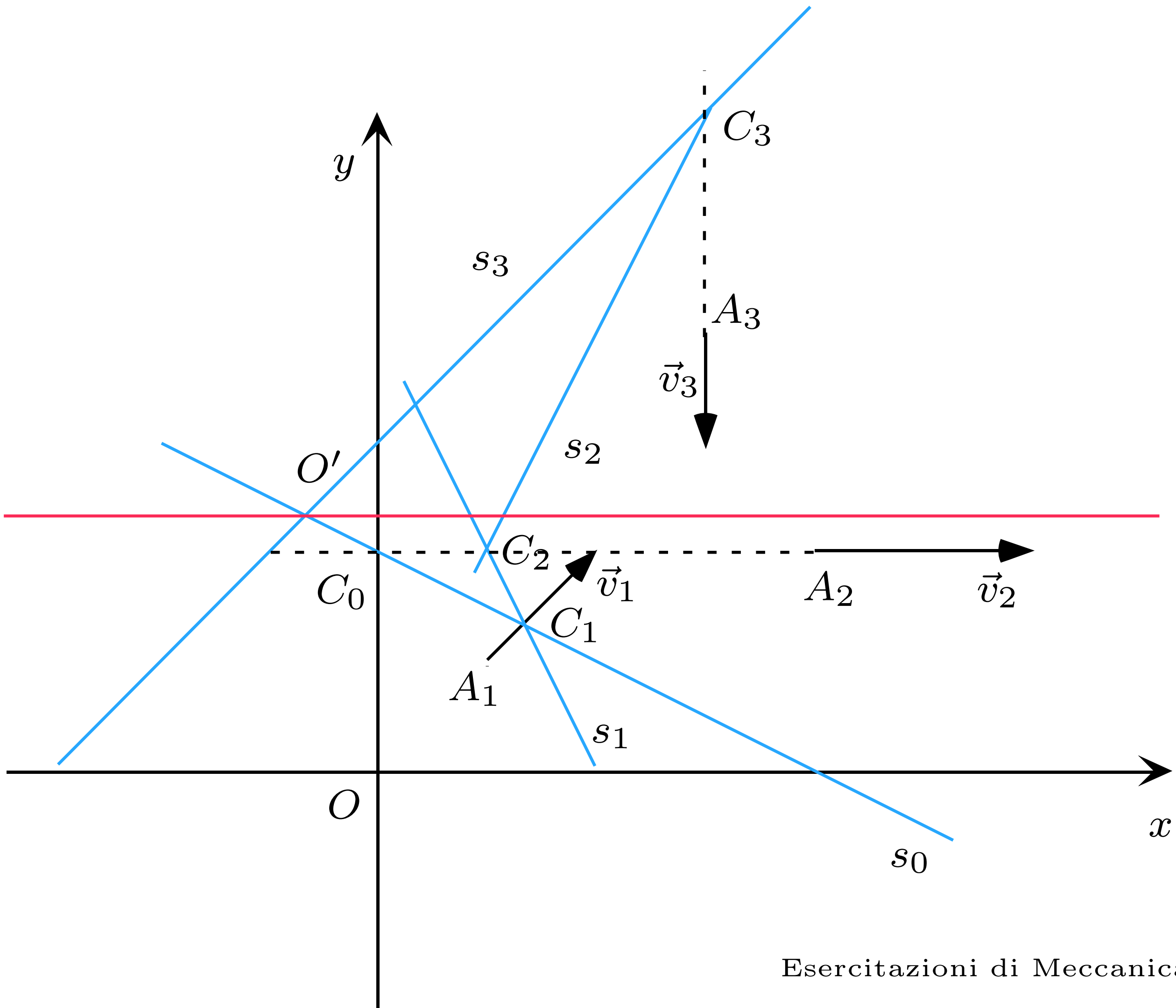
Quindi l'asse centrale è una retta appartenente al piano Oxy ed avente equazione: $3y = 7$, $z = 0$.

Graficamente: Scelto come punto B_0 l'origine O del riferimento $Oxyz$ (quindi $B_0(0,0,0)$), si costruisca la poligonale non chiusa ($B_0 \neq B_3$ e $\vec{R} \neq \vec{0}$):





Scelto $P_0(2,-1,0) \in$ piano Oxy, tracciamo le rette r_i, $i = 0,1,2,3$, che congiungono P_0 con i rispettivi B_i. Scelto $C_0(0,2,0) \in$ piano Oxy, tracciamo le rette s_i ed individuiamo i punti C_i. La retta passante per $O' = s_0 \cap s_3$ e parallela ad $\vec{R}$ è l'asse centrale del sistema $\sum_\pi$. Inoltre $\sum_\pi \approx (O', \vec{R})$.



Nel piano Oxy:

$$
\begin{array}{llcl}
B_0(0,0), & P_0(2,-1) & \Rightarrow & r_0 : y = -\frac{1}{2}\,x \\
B_1(1,1), & P_0(2,-1) & \Rightarrow & r_1 : y = -2x + 3 \\
B_2(3,1), & P_0(2,-1) & \Rightarrow & r_2 : y = 2x - 5 \\
B_3(3,0), & P_0(2,-1) & \Rightarrow & r_3 : y = x - 3
\end{array}
$$

Calcoliamo ora nel piano Oxy le equazioni delle rette s_i, $i = 0, 1, 2, 3$:

- $s_0 \parallel r_0$ e passante per $C_0(0,2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}\,x + 2$.

$$
C_1 : \begin{cases} s_0 : & y = -\frac{1}{2}\,x + 2 \\ t_{A_1} \parallel \vec{v}_1 : & y = x \end{cases} \Rightarrow \quad C_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).
$$

- $s_1 \parallel r_1$ e passante per $C_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \Rightarrow y = -2\,x + 4$.

$$C_2 : \begin{cases} s_1 : & y = -2\,x + 4 \\ t_{A_2} \parallel \vec{v}_2 : & y = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad C_2\,(1,2)\,.$$

- $s_2 \parallel r_2$ e passante per $C_2\,(1,2) \Rightarrow y = 2\,x$.

$$C_3 : \begin{cases} s_2 : & y = 2\,x \\ t_{A_3} \parallel \vec{v}_3 : & x = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad C_3\,(3,6)\,.$$

- $s_3 \parallel r_3$ e passante per $C_3\,(3,6) \Rightarrow y = x + 3$.

$$O' : \begin{cases} s_3 : & y = x + 3 \\ s_0 : & y = -\frac{1}{2}\,x + 2 \end{cases} \Rightarrow \quad O'\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

L'asse centrale è la retta passante per O' e $\parallel \vec{R} = (3,0,0)$.
Nel piano Oxy ha equazione $3y = 7$.
Inoltre $\sum_\pi \approx (O', \vec{R})$ e $\vec{R}$ può essere applicato in un qualsiasi punto dell'asse centrale.

Esercizio 2.

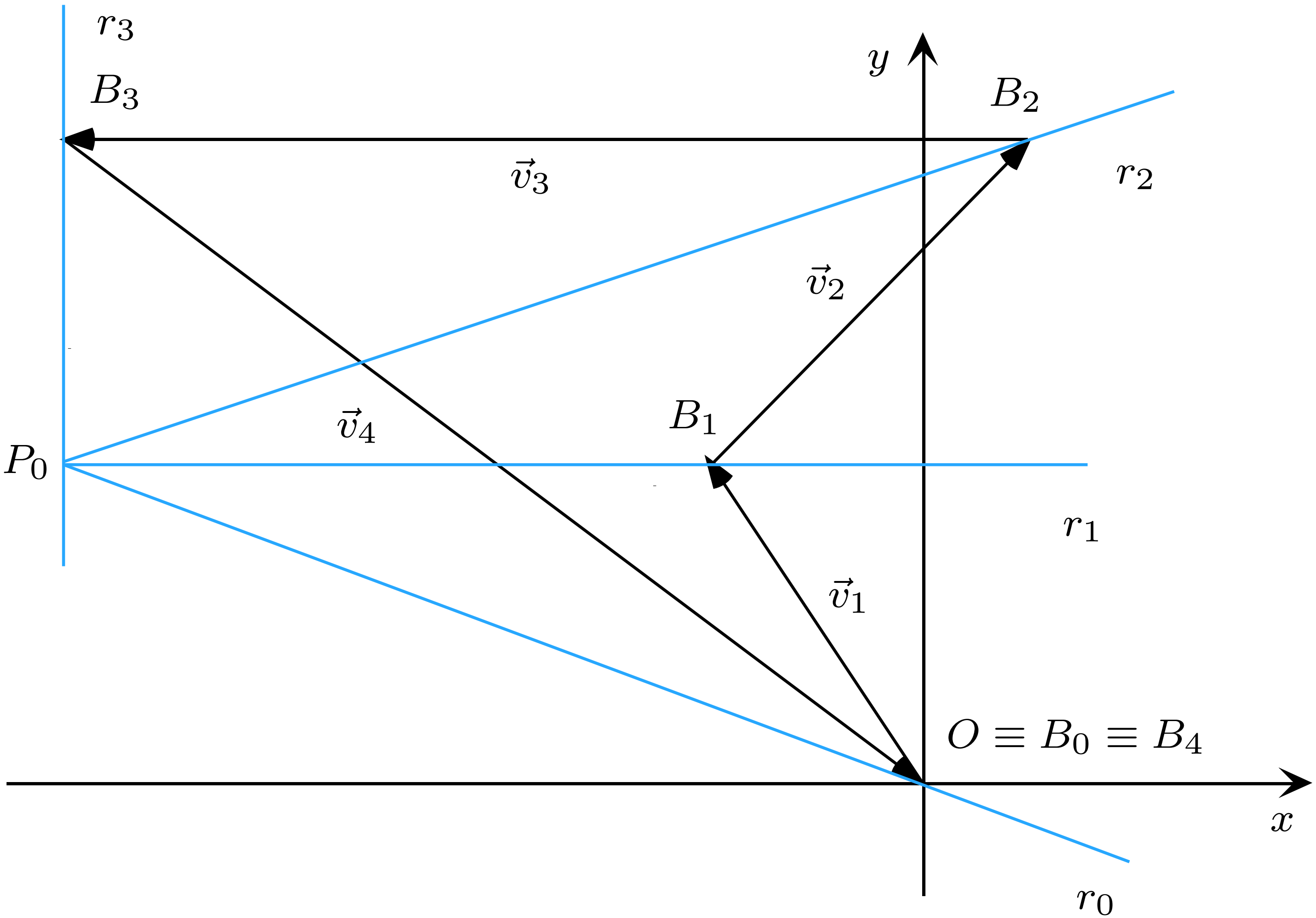
Algebricamente:

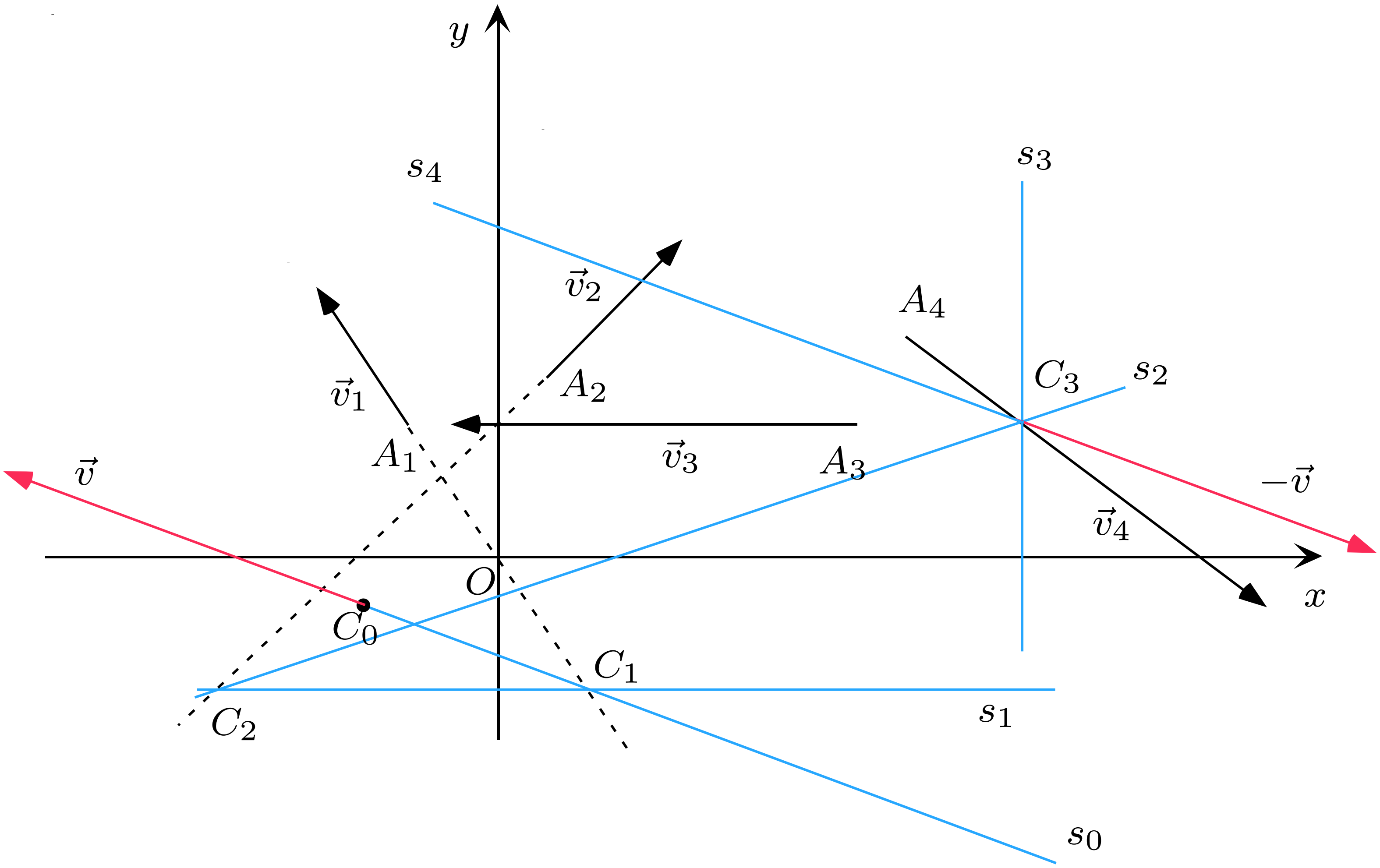
$$\vec{R} = \vec{0} \;\Rightarrow\; I = 0$$

$$\vec{M}_O = (0, 0, -76) \neq \vec{0}\,.$$

Quindi $\sum_\pi \approx$ coppia di momento $\vec{M}_O$.

Graficamente: Poiché $\vec{R} = \vec{0}$, la poligonale è chiusa. Nel piano Oxy siano $B_0(0,0)$, $P_0(-8,3)$, $C_0(-3,-1)$. $s_0 \parallel s_4 \Rightarrow s_0 \cap s_4 = \emptyset$. Pertanto $\sum_\pi \approx$ coppia $(C_0, \vec{v})$, $(C_4, -\vec{v})$, con $\vec{v} = (P_0 - B_0)$ e $-\vec{v} = (B_4 - P_0) = (B_0 - P_0)$.





y
s_4
s_3
$\vec{v}_2$
A_4
$\vec{v}_1$
A_2
C_3
s_2
A_1
$\vec{v}_3$
A_3
$\vec{v}$
$-\vec{v}$
$\vec{v}_4$
O
x
C_0
C_1
C_2
s_1
s_0

Nel piano Oxy:

$$\begin{array}{llcl} B_0(0,0), & P_0(-8,3) & \Rightarrow & r_0 : y = -\frac{3}{8}\,x \\ B_1(-2,3), & P_0(-8,3) & \Rightarrow & r_1 : y = 3 \\ B_2(1,6), & P_0(-8,3) & \Rightarrow & r_2 : y = \frac{1}{3}x + \frac{17}{3} \\ B_3(-8,0), & P_0(-8,3) & \Rightarrow & r_3 : x = -8 \end{array}$$

Risulta $r_4 \equiv r_0$. Calcoliamo ora nel piano Oxy le equazioni delle rette s_i, $i = 0,1,2,3$:

- $s_0 \parallel r_0$ e passante per $C_0(-3,-1) \Rightarrow y = -\frac{3}{8}\,x - \frac{17}{8}$.

$$C_1 : \begin{cases} s_0 : & y = -\frac{3}{8}\,x - \frac{17}{8} \\ t_{A_1} \parallel \vec{v}_1 : & y = -\frac{3}{2}\,x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1\left(\frac{17}{9}, -\frac{17}{6}\right).$$

- $s_1 \parallel r_1$ e passante per $C_1\left(\frac{17}{9}, -\frac{17}{6}\right) \Rightarrow y = -\frac{17}{6}$.

$$C_2 : \begin{cases} s_1 : & y = -\dfrac{17}{6} \\ t_{A_2} \parallel \vec{v}_2 : & y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \quad C_2\left(-\frac{35}{6}, -\frac{17}{6}\right).$$

- $s_2 \parallel r_2$ e passante per $C_2\left(-\frac{35}{6}, -\frac{17}{6}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{3}\,x - \frac{8}{9}$.

$$C_3 : \begin{cases} s_2 : & y = \frac{1}{3}\,x - \frac{8}{9} \\ t_{A_3} \parallel \vec{v}_3 : & y = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad C_3\left(\frac{35}{3}, 3\right).$$

- $s_3 \parallel r_3$ e passante per $C_3\left(\frac{35}{3}, 3\right) \Rightarrow x = \frac{35}{3}$.

$$C_4 : \begin{cases} s_3 : & x = \frac{35}{3} \\ s_0 : & y = -\frac{3}{4}\,x + \frac{47}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad C_4\left(\frac{35}{3}, 3\right).$$

- $s_4 \parallel r_4$ e passante per $C_4\left(\frac{35}{3}, 3\right) \Rightarrow y = -\frac{3}{8}\,x + \frac{59}{8}$.

Risulta $s_0 \parallel s_4$ e $s_0 \cap s_4 = \emptyset$. Si ha

$$s_0 : \ y = -\frac{3}{8}\,x - \frac{17}{8}\,, \quad C_0(-3,-1), \quad \vec{v} = (P_0 - B_0)$$

$$s_4 : \ y = -\frac{3}{8}\,x + \frac{59}{8}\,, \quad C_4\left(\frac{35}{3}, 3\right), \quad -\vec{v} = (B_4 - P_0) = (B_0 - P_0)\,.$$

$\square$

Esercizio 3.

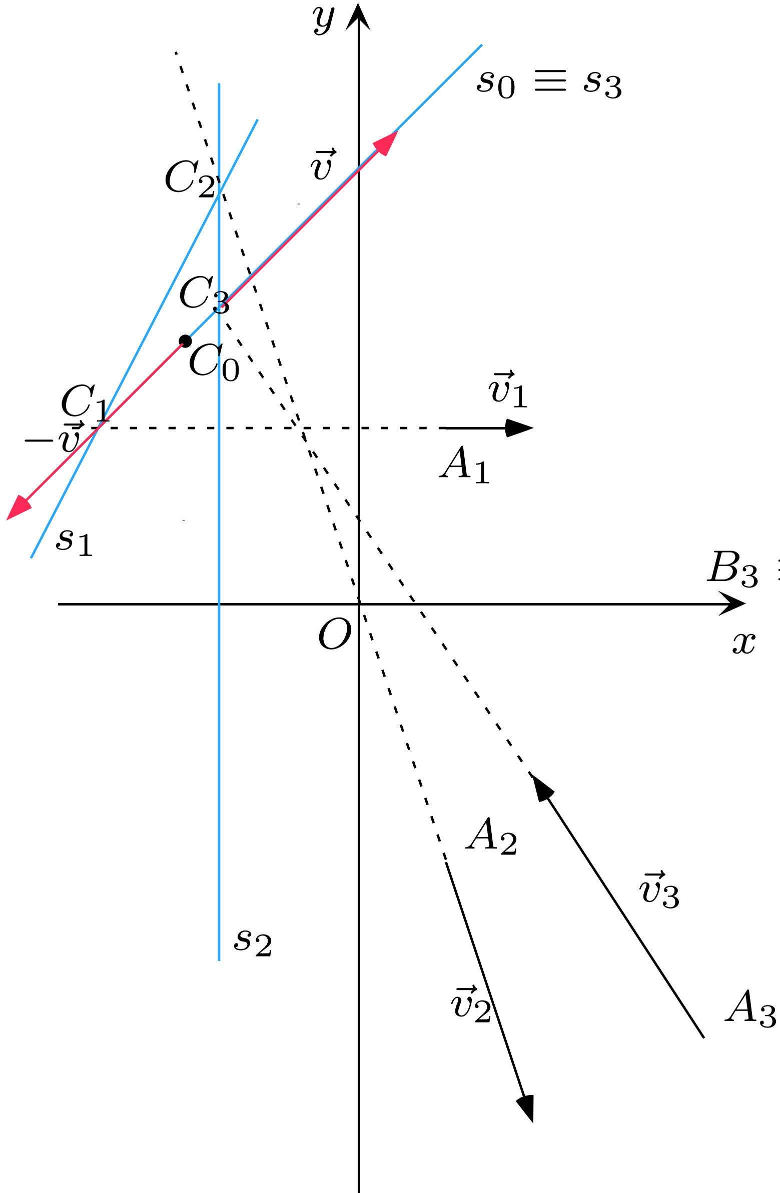
Algebricamente:

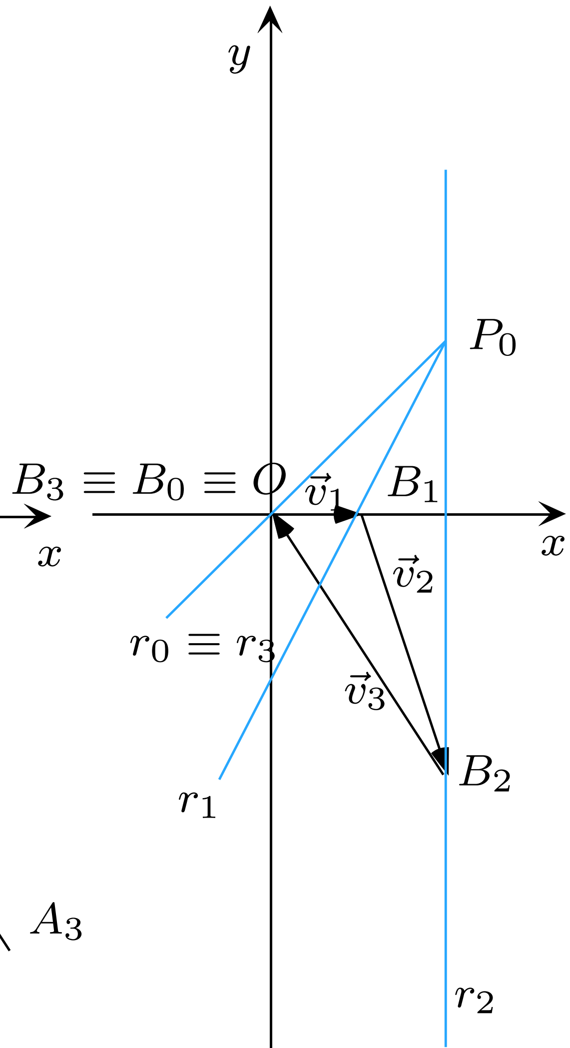
$$\vec{R} = \vec{0} \ \Rightarrow \ I = 0$$

$$\vec{M}_O = \vec{0}\,.$$

Quindi $\sum_\pi \approx$ zero.

Graficamente: Poiché $\vec{R} = \vec{0}$, la poligonale è chiusa. Nel piano Oxy siano $B_0(0,0)$, $P_0(2,2)$, $C_0(-2,3)$.





Nel piano Oxy:

$$\begin{array}{llll} B_0(0,0), & P_0(2,2) & \Rightarrow & r_0 : y = x \\ B_1(1,0), & P_0(2,2) & \Rightarrow & r_1 : y = 2x - 2 \\ B_2(2,-3), & P_0(2,2) & \Rightarrow & r_2 : x = 2 \end{array}$$

Risulta $r_3 \equiv r_0$. Calcoliamo ora nel piano Oxy le equazioni delle rette s_i, $i = 0, 1, 2, 3$:

- $s_0 \parallel r_0$ e passante per $C_0(-2,3) \Rightarrow y = x + 5$.

$$C_1 : \begin{cases} s_0 : & y = x + 5 \\ t_{A_1} \parallel \vec{v}_1 : & y = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1\,(-3, 2)\,.$$

- $s_1 \parallel r_1$ e passante per $C_1\,(-3,2) \Rightarrow y = 2x + 8$.

$$C_2 : \begin{cases} s_1 : & y = 2x + 8 \\ t_{A_2} \parallel \vec{v}_2 : & y = -3x \end{cases} \Rightarrow \quad C_2\left(-\frac{8}{5}, \frac{24}{5}\right).$$

- $s_2 \parallel r_2$ e passante per $C_2\,(-\frac{8}{5}, \frac{24}{5}) \Rightarrow x = -\frac{8}{5}$.

$$C_3 : \begin{cases} s_2 : & x = -\frac{8}{5} \\ t_{A_3} \parallel \vec{v}_3 : & y = -\frac{3}{2}\,x + 1 \end{cases} \Rightarrow \quad C_3\left(-\frac{8}{5}, \frac{17}{5}\right).$$

- $s_3 \parallel r_3$ e passante per $C_3\,(-\frac{8}{5}, \frac{17}{5}) \Rightarrow y = x + 5$.