Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Cinematica del corpo rigido

Maria Grazia Naso

naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

Teorema di Mozzi e asse di Mozzi

Formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi:

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_{O'}(t) + \vec{\omega}(t) \times (P - O')\,. \tag{1}$$

Teorema di Mozzi. *In ogni istante l'atto di moto più generale di un sistema rigido è rototraslatorio o elicoidale, i.e. esiste un punto O'' tale che*

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_{O''}(t) + \vec{\omega}(t) \times (P - O'')\,, \tag{2}$$

con $\vec{v}_{O''} \parallel \vec{\omega}$. In particolare potrà risultare traslatorio ($\vec{\omega}(t) = \vec{0}$) o rotatorio ($\vec{v}_{O''}(t) = \vec{0}$).

- *Asse di Mozzi*: la retta passante per O'' e parallela ad $\vec{\omega}$.

Esercizio 1. Si determini l'equazione dell'asse di Mozzi.

Risoluzione. Sia $O'' \in$ asse di Mozzi: $\vec{v}_{O''} \parallel \vec{\omega}$ o $\vec{v}_{O''} = \vec{0}$. Da (1), con $P \equiv O''$, risulta

$$\vec{v}_{O''} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (O'' - O')$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\vec{v}_{O''} \times \vec{\omega}}_{=\vec{0}} = \vec{v}_{O'} \times \vec{\omega} + \left[\vec{\omega} \times (O'' - O')\right] \times \vec{\omega}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_{O'} \times \vec{\omega} + (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(O'' - O') - \left[\vec{\omega} \cdot (O'' - O')\right] \vec{\omega} = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$(O'' - O') = \frac{(O'' - O') \cdot \vec{\omega}}{\omega^2} \vec{\omega} + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}}{\omega^2} \, .$$

Quindi si trova

$$\boxed{(O'' - O') = \lambda(O'')\,\vec{\omega} + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}}{\omega^2}}$$

dove $\lambda(O'') := \dfrac{(O'' - O') \cdot \vec{\omega}}{\omega^2} \in \mathbb{R}$. $\square$

- **Invariante scalare**: $I := \vec{v}_O \cdot \vec{\omega}$
  (non dipende dal punto O).

Consideriamo l'atto di moto di un corpo rigido in un istante t:

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_O(t) + \vec{\omega}(t) \times (P - O)\,. \tag{3}$$

- Se $\vec{\omega}(t) = \vec{0}$, allora $\vec{v}_P(t) = \vec{v}_O(t)$ e l'atto di moto è traslatorio ($\vec{v}_O(t) \neq \vec{0}$) o nullo ($\vec{v}_O(t) = \vec{0}$).
- Se $\vec{\omega}(t) \neq \vec{0}$, applicando in (3) l'identità

$$\vec{v}_O = \frac{\vec{v}_O \cdot \vec{\omega}}{\omega^2}\,\vec{\omega} + \frac{\vec{\omega} \times (\vec{v}_O \times \vec{\omega})}{\omega^2}\,,$$

  si trova

$$\vec{v}_P = \frac{I}{\omega^2}\,\vec{\omega} + \vec{\omega} \times \left[(P - O) + \frac{\vec{v}_O \times \vec{\omega}}{\omega^2}\right]. \tag{4}$$

Si introduca il punto C tale che $(C - O) := \dfrac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2}$. Quindi (4) diventa

$$\vec{v}_P = \frac{I}{\omega^2}\vec{\omega} + \vec{\omega} \times (P - C)\,, \tag{5}$$

e $\vec{v}_C = \frac{I}{\omega^2}\vec{\omega}$, $C \in$ asse di Mozzi (N.B. deve essere $\vec{\omega} \neq \vec{0}$).

- Se $I \neq 0$, l'atto di moto è elicolidale.
- Se $I = 0$, $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, l'atto di moto è rotatorio (l'asse di Mozzi è l'asse di istantanea rotazione).
- Se $I = 0$, $\vec{\omega} = \vec{0}$, $\vec{v}_O \neq \vec{0}$, l'atto di moto è traslatorio.
- Se $I = 0$, $\vec{\omega} = \vec{0}$, $\vec{v}_O = \vec{0}$, l'atto di moto è nullo.
