Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Composizione di stati cinetici

Maria Grazia Naso

naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

Composizione di stati cinetici

Siano $\vec{v}_1(P)$ e $\vec{v}_2(P)$ due stati cinetici *in un determinato istante* t. Lo stato cinetico risultante $\vec{v}(P)$, somma dei due precedenti stati cinetici, è

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_2(P) \, .$$

(a) Composizione di due stati cinetici di traslazione.
Due *stati cinetici di traslazione* si compongono in uno **stato cinetico di traslazione**.
Siano $\vec{v}_1(P) = \vec{u}_1$ e $\vec{v}_2(P) = \vec{u}_2$, *indipendenti da* P. Allora

$$\boxed{\vec{v}(P) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2} \qquad \textit{indipendente da } P.$$

(b) COMPOSIZIONE DI UNO STATO CINETICO DI TRASLAZIONE ED UNO DI ROTAZIONE CON $\vec{u} \perp \vec{\omega}$.

Due stati cinetici, *uno di traslazione*:

$$\vec{v}_1(P) = \vec{u}\,,$$

l'altro di rotazione

$$\vec{v}_2(P) = \vec{\omega} \times (P - O_2)\,,$$

con asse di istantanea rotazione $r_2 \perp$ alla direzione della traslazione, i.e. $\vec{\omega} \perp \vec{u}$, si compongono in uno **stato cinetico di rotazione**, con asse di istantanea rotazione $\parallel$ ad r_2.

Essendo $\vec{\omega} \perp \vec{u}$, esiste un punto O_1 tale che

$$\vec{v}_1(P) = \vec{\omega} \times (O_2 - O_1)\,.$$

Quindi, risulta

$$\boxed{\vec{v}(P)} = \vec{\omega} \times (P - O_2) + \vec{\omega} \times (O_2 - O_1) \boxed{= \vec{\omega} \times (P - O_1)}\,.$$

Lo **stato cinetico risultante** è **rotatorio** ed ha l'*asse di istantanea rotazione passante per* O_1.

(c) Composizione di uno stato cinetico di traslazione ed uno di rotazione.

Due stati cinetici, *uno di traslazione*:

$$\vec{v}_1(P) = \vec{u}\,,$$

l'*altro di rotazione*

$$\vec{v}_2(P) = \vec{\omega} \times (P - O_2)\,,$$

si compongono sempre in uno **stato cinetico elicoidale** (Teorema di Mozzi).

Asse di Mozzi: la retta passante per O' e parallela ad $\vec{\omega}$.

- Si osservi che l'asse di Mozzi è il luogo dei punti del C.R. che hanno *velocità minima*:

$$|\vec{v}(P)|^2 = |\vec{v}(O')|^2 + |\vec{\omega} \times (P - O')|^2 \geq |\vec{v}(O')|^2 .$$

- Lo *stato cinetico* del C.R. è *rotatorio* se e solo se *tutti i punti dell'asse di Mozzi hanno velocità nulla*: $\vec{v}(O') = \vec{0}$. In questo caso, l'asse di Mozzi coincide con l'asse di istantanea rotazione.

(d) Composizione di due stati cinetici di rotazione.

Se $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ sono le velocità angolari istantanee corrispondenti agli stati cinetici di rotazione

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{\omega}_1 \times (P - O_1) \\ \vec{v}_2 &= \vec{\omega}_2 \times (P - O_2)\,, \end{aligned}$$

si ha

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_2(P) = \vec{\omega}_1 \times (P - O_1) + \vec{\omega}_2 \times (P - O_2) \quad (1)$$

dove O_1 e O_2 sono due punti dei rispettivi assi di istantanea rotazione r_1 e r_2.

Per studiare (1), distinguiamo tre casi, dipendenti dalla posizione relativa degli assi r_1 ed r_2.

(d.1) ASSI r_1 E r_2 CONCORRENTI.

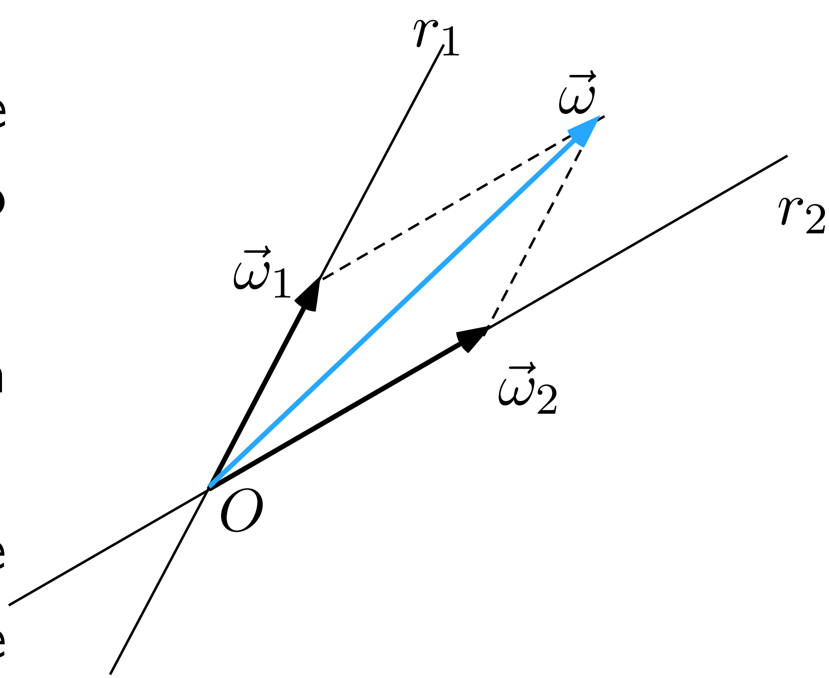
Due *stati cinetici di rotazione*, attorno ad assi istantanei di rotazione *concorrenti* r_1 ed r_2, si compongono in uno **stato cinetico di rotazione** con *asse di istantanea rotazione* r*, concorrente con gli assi degli stati componenti.*

Sia $O = r_1 \cap r_2$.

Allora si possono traslare $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ in modo che il loro punto di applicazione sia O.

Sia $\vec{\omega} := \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, risulta $\boxed{\vec{v}(P) = \vec{\omega} \times (P - O)}$.

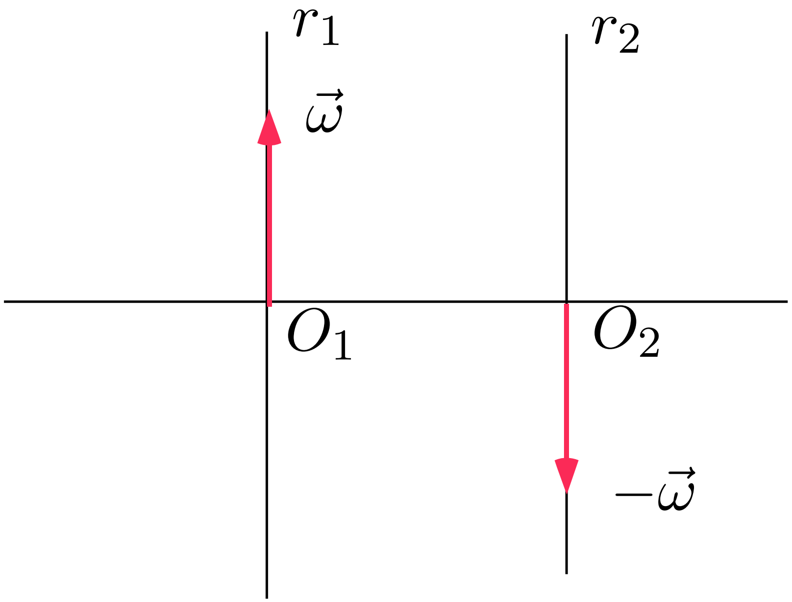
L'asse di istantanea rotazione passa per O ed ha direzione $\parallel \vec{\omega}$.



(d.2) ASSI r_1 E r_2 PARALLELI. Siano $\vec{\omega}_1 := \omega_1 \vec{k}$ e $\vec{\omega}_2 := \omega_2 \vec{k}$. Allora, da (1) si ha

$$\vec{v}(P) = \vec{k} \times \left[\omega_1(P - O_1) + \omega_2(P - O_2)\right] \, . \tag{2}$$

(d.2.1) Se $\omega_1 = -\omega_2$,



da (2) si ha

$$\begin{aligned} \boxed{\vec{v}(P)} &= \vec{k} \times [\omega_1(P - O_1) - \omega_1(P - O_2)] \\ &= \boxed{\omega_1 \vec{k} \times (O_2 - O_1)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Si osservi che $\vec{v}(P)$ è

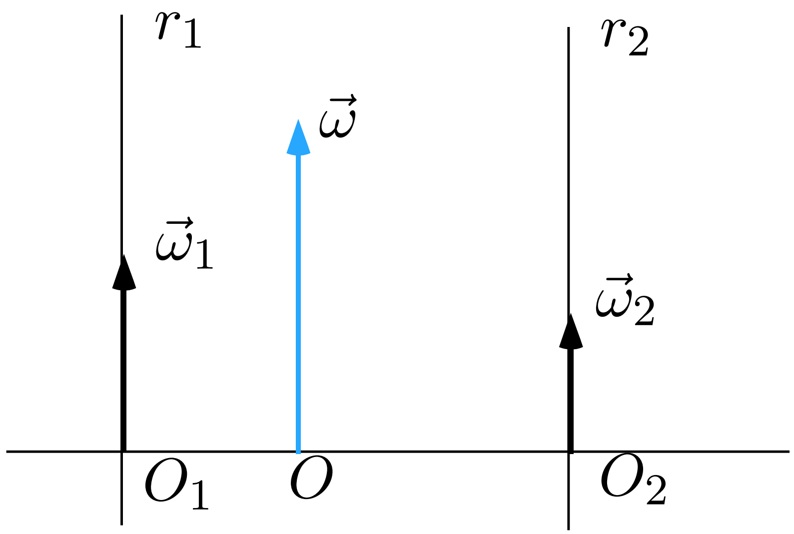
- indipendente da P;
- $\perp$ al piano individuato da r_1 e r_2.

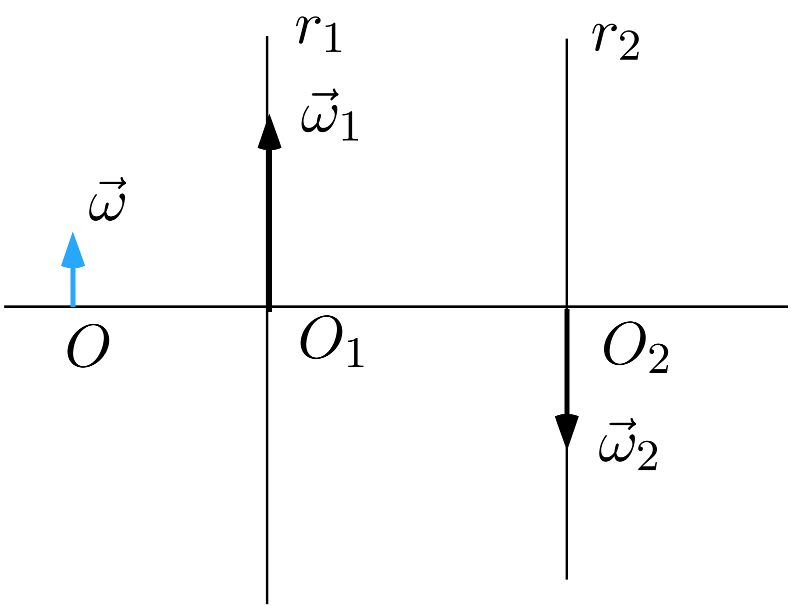
Quindi

- ▶ Due *stati cinetici di rotazione*, attorno ad assi istantanei di rotazione $r_1 \parallel r_2$ e con $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{0}$, si compongono in uno **stato cinetico di traslazione** con *direzione* $\perp$ *al piano individuato da* r_1 e r_2.

(d.2.2) Se $\omega_1 \neq -\omega_2$, esiste un punto $O \in$ retta O_1O_2 tale che

$$\vec{\omega}_1 \times (O_1 - O) = \vec{\omega}_2 \times (O - O_2)\,. \tag{4}$$





Si osservi:

- Qualunque sia O (interno o esterno al segmento O_1O_2), i vettori
$$\vec{\omega}_1 \times (O_1 - O) \quad \text{e} \quad \vec{\omega}_2 \times (O - O_2)$$
hanno la *stessa direzione*, $\perp$ al piano su cui si trovano $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$.
- Se $\vec{\omega}_1$ ed $\vec{\omega}_2$ hanno lo stesso verso, allora O è *interno* al segmento O_1O_2.
- Se $\vec{\omega}_1$ ed $\vec{\omega}_2$ hanno verso opposto, allora O è *esterno* al segmento O_1O_2.
- Essendo $|\vec{\omega}_1 \times (O_1 - O)| = |\vec{\omega}_2 \times (O - O_2)|$, risulta
$$\omega_1 \, \overline{O_1O} = \omega_2 \, \overline{OO_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{OO_2}}{\overline{O_1O}} \, .$$

Pertanto, da (1) e (4), si ottiene

$$\begin{aligned}\vec{v}(P) =& \vec{\omega}_1 \times (P - O_1) + \vec{\omega}_2 \times (P - O_2) \\ &+ \underbrace{\vec{\omega}_1 \times (O_1 - O) + \vec{\omega}_2 \times (O_2 - O)}_{=\vec{0}} \\ =& \vec{\omega}_1 \times (P - O) + \vec{\omega}_2 \times (P - O) = \underbrace{(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)}_{=:\vec{\omega}} \times (P - O)\end{aligned}$$

da cui risulta

$$\boxed{\vec{v}(P) = \vec{\omega} \times (P - O)}\,.$$

L'asse di istantanea rotazione dello stato cinetico risultante è *parallelo* ad $\vec{\omega}$ ($\parallel \vec{\omega}_1 \parallel \vec{\omega}_2$) e *passa per* O.

Quindi

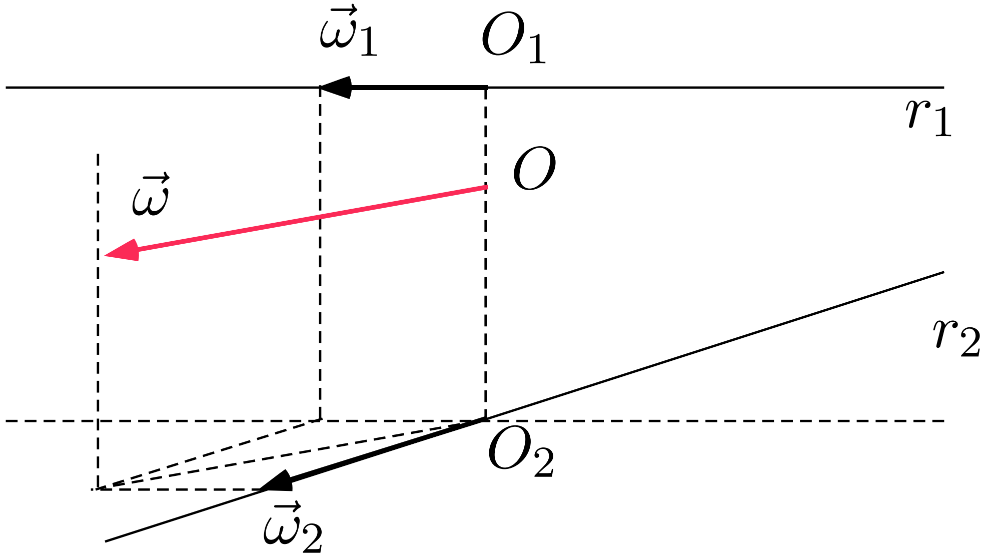
- Due stati cinetici di rotazione, attorno ad assi di istantanea rotazione $r_1 \parallel r_2$ e con $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \neq \vec{0}$, si compongono in uno **stato cinetico di rotazione** con *asse di istantanea rotazione* $r \parallel r_1 \parallel r_2$.

(d.3) ASSI r_1 E r_2 SGHEMBI.

Due stati cinetici di rotazione:

$$\vec{v}_1(P) = \vec{\omega}_1 \times (P - O_1)$$
$$\vec{v}_2(P) = \vec{\omega}_2 \times (P - O_2)\,,$$

attorno a due assi di istantanea rotazione *sghembi*, si compongono sempre in uno **stato cinetico elicoidale**.



Infatti, da (1) si ha

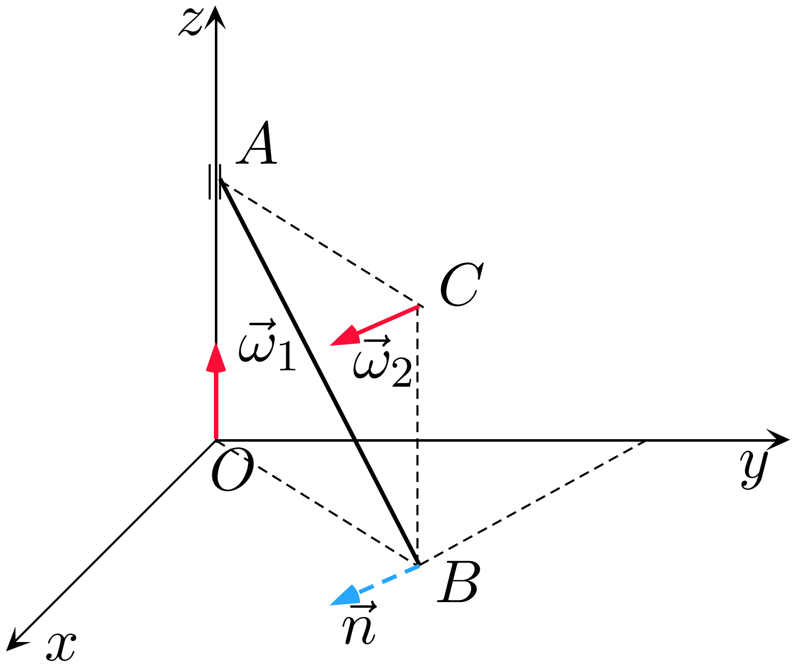
$$\begin{aligned}
\vec{v}(P) =& \vec{\omega}_1 \times (P - O_1) + \vec{\omega}_2 \times (P - O_2) \\
& + \underbrace{\vec{\omega}_1 \times (P - O_2) - \vec{\omega}_1 \times (P - O_2)}_{=\vec{0}} \\
=& \underbrace{(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)}_{=:\vec{\omega}} \times (P - O_2) + \vec{\omega}_1 \times (O_2 - O_1)\,,
\end{aligned}$$

e quindi risulta

$$\boxed{\vec{v}(P) = \underbrace{\vec{\omega} \times (P - O_2)}_{\text{s.c. di rotazione}} + \underbrace{\vec{\omega}_1 \times (O_2 - O_1)}_{\text{s.c. di traslazione}}}\,.$$

- Per applicazione del Teorema di Mozzi, lo stato cinetico risultante è *elicoidale*.

Esercizio 1. Nel riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, calcolare il modulo della velocità dei punti dell'asse di Mozzi dell'asta AB, di lunghezza l unitaria, avente l'estremo A scorrevole su Oz e l'estremo B mobile nel piano Oxy,



nell'istante in cui l'asta AB passa per la posizione $\varphi = \frac{\pi}{6}$ e $\dot{\varphi} = 2\sqrt{2}$, $\dot{\vartheta} = 1$, avendo posto $\varphi = z^{-}\widehat{A}B$ e $\vartheta = x^{+}\widehat{O}B$.

Risoluzione. Si tratta della composizione di due stati cinetici rotatori:

$\vec{\omega}_1(0, 0, \dot{\vartheta})$ applicato in $O(0, 0, 0)$,

$\vec{\omega}_2(\dot{\varphi}\,\sin\vartheta, -\dot{\varphi}\,\cos\vartheta, 0)$ applicato in $C(l\sin\varphi\cos\vartheta, l\sin\varphi\sin\vartheta, l\cos\varphi)$.

Quindi $\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\,\vec{k} + \dot{\varphi}\,\vec{n}$, dove $\vec{n}(\sin\vartheta, -\cos\vartheta, 0)$. Inoltre $\omega^2 = \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2$. Preso $P \equiv C$, si ha

$$\vec{v}_C = \sum_{i=1}^{2} \vec{v}_i = -l\dot{\vartheta}\,\sin\varphi\,\vec{n}\,.$$

Si ha $I = \vec{v}_C \cdot \vec{\omega} = -l\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}\,sin\varphi$. N.B. Poiché $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\dot{\varphi} = 2\sqrt{2}$, $\dot{\vartheta} = 1$, $l = 1$, risulta $I \neq 0$. Quindi lo stato cinetico risultante è elicoidale. Se $M \in$ a.M., allora $\vec{v}_M = \frac{I}{\omega^2}\,\vec{\omega} = -\frac{l\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}\,sin\varphi}{\dot{\vartheta}^2+\dot{\varphi}^2}\vec{\omega}$ e $|\vec{v}_M| = \frac{\sqrt{2}}{3}$. □

Osservazione 1. Dati due stati cinetici rotatori $(O_1, \vec{\omega}_1)$ e $(O_2, \vec{\omega}_2)$, per stabilire lo stato cinetico risultante basta studiare l'*eventuale* complanarietà dei vettori $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $(O_1 - O_2)$.

N.B. $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $(O_1 - O_2)$ complanari $\Leftrightarrow \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \cdot (O_1 - O_2) = 0$.

- Se $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $(O_1 - O_2)$ **non** sono complanari, allora l'*atto di moto* risultante è *elicoidale*.
- Se $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $(O_1 - O_2)$ sono complanari e
  - $\vec{\omega}_1 \nparallel \vec{\omega}_2$, allora l'*atto di moto* risultante è *rotatorio*.
  - $\vec{\omega}_1 \parallel \vec{\omega}_2$ e $\vec{\omega}_1 \neq -\vec{\omega}_2$, allora l'*atto di moto* risultante è *rotatorio*.
  - $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$, allora l'*atto di moto* risultante è *traslatorio* (Se inoltre $\vec{v}_O = \vec{0}$, l'*atto di moto* risultante è *nullo*).

Esercizio 2. Nel riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, comporre i seguenti stati cinetici $\vec{v}_i(P) = \vec{\omega}_i \times (P - O_i)$, $i = 1, 2$,

$$O_1(3, -5, 0) \quad O_2(0, 0, 1)$$

$$\vec{\omega}_1(-3, 0, 1) \quad \vec{\omega}_2(2, 1, 0)$$

e determinare

(a) lo stato cinetico risultante.

(b) l'equazione dell'asse di Mozzi.

Risoluzione. (a) Stato cinetico risultante:

I metodo: Essendo

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \cdot (O_1 - O_2) = -10 \neq 0\,,$$

lo *stato cinetico risultante* è *elicoidale*.

II metodo: Preso $P \equiv O$, si ha

$$\vec{v}_O = \sum_{i=1}^{2} \vec{\omega}_i \times (O - O_i) = (-6, -1, -15)\,.$$

Inoltre $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{2} \vec{\omega}_i = (-1, 1, 1) \neq \vec{0}$. Poiché $I = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} = -10 \neq 0$, lo *stato cinetico risultante* è *elicoidale*.

(b) Sia $M \in$ asse di Mozzi (a.M.) e

$$(M - O) = \lambda(M)\,\vec{\omega} + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2}\,,$$

dove $\vec{\omega} \times \vec{v}_O = (-14, -21, 7)$ e $\lambda(M) \in \mathbb{R}$. Essendo $\omega^2 = 3$, l'*equazione dell'asse di Mozzi*

- in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = -\frac{14}{3} - \lambda \\ y = -7 + \lambda \\ z = \frac{7}{3} + \lambda \end{cases}$$

- in forma cartesiana:

$$-x - \frac{14}{3} = y + 7 = z - \frac{7}{3}\,. \qquad \square$$

Esercizio 3. Nel riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, comporre i seguenti stati cinetici

$$\vec{v}_i(P) = \vec{\omega}_i \times (P - O_i), \quad i = 1, 2, \quad \vec{v}_3 = \vec{u},$$

dove

$$O_1(1,0,0) \qquad O_2(0,1,0)$$

$$\vec{\omega}_1(0,0,-1) \quad \vec{\omega}_2(0,0,1) \quad \vec{u}(-1,-1,0)$$

e determinare lo stato cinetico risultante.

Risoluzione. Preso $P \equiv O$, si ha

$$\vec{v}_O = \sum_{i=1}^{3} \vec{v}_i = \vec{0}\,.$$

Inoltre $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{2} \vec{\omega}_i = \vec{0}$ (qui $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$). Lo *stato cinetico risultante* è *nullo*. $\square$

Esercizio 4. Nel riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, comporre i seguenti stati cinetici

$$\vec{v}_i(P) = \vec{\omega}_i \times (P - O_i), \quad i = 1, 2, \quad \vec{v}_3 = \vec{u},$$

dove

$$O_1(0, 1, 2) \quad O_2\left(0, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{\omega}_1\left(0, \frac{1}{2}, 1\right) \quad \vec{\omega}_2(0, -1, 2) \quad \vec{u}\left(0, 2, \frac{1}{3}\right)$$

e determinare lo stato cinetico risultante.

Risoluzione. Preso $P \equiv O$, si ha

$$\vec{v}_O = \sum_{i=1}^{3} \vec{v}_i = \left(0, 2, \frac{1}{3}\right).$$

Inoltre $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{2} \vec{\omega}_i = \left(0, -\frac{1}{2}, 3\right) \neq \vec{0}$. Poiché $I = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} = 0$, lo *stato cinetico risultante* è *rotatorio*.

N.B. Se $M \in$ a.M., $\vec{v}_M = \vec{0}$. $\square$

Esercizio 5. Nel riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, comporre i seguenti stati cinetici

$$\vec{v}_i(P) = \vec{\omega}_i \times (P - O_i), \quad i = 1, 2, \quad \vec{v}_3 = \vec{u},$$

dove

$$O_1(1,0,0) \quad O_2\,(0,0,2)$$

$$\vec{\omega}_1\,(0,1,0) \quad \vec{\omega}_2(0,-1,0) \quad \vec{u}\,(0,0,-1)$$

e determinare lo stato cinetico risultante.

Risoluzione. Preso $P \equiv O$, si ha

$$\vec{v}_O = \sum_{i=1}^{3} \vec{v}_i = (2, 0, 0) \neq \vec{0}\,.$$

Inoltre $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{2} \vec{\omega}_i = \vec{0}$. Poiché $I = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} = 0$, lo *stato cinetico risultante* è *traslatorio*. $\square$

Esercizio 6. Nel riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, comporre i seguenti stati cinetici

$$\vec{v}_i(P) = \vec{\omega}_i \times (P - O_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

dove

$$O_1\left(\tfrac{1}{2}, 0, 0\right) \quad O_2\,(0, 0, 1) \quad O_3\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right)$$
$$\vec{\omega}_1\,(0, 2, 0) \quad \vec{\omega}_2(0, 1, -1) \quad \vec{\omega}_3\,(0, -1, 1)$$

e calcolare il modulo della velocità dei punti dell'a.M. .

Risoluzione. Preso $P \equiv O$, si ha

$$\vec{v}_O = \sum_{i=1}^{3} \vec{v}_i = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \neq \vec{0}\,.$$

Inoltre $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \vec{\omega}_i = (0, 2, 0) \neq \vec{0}$, $\omega^2 = 4$. Si ha $I = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} = 1$. Se $M \in$ a.M., allora $\vec{v}_M = \frac{I}{\omega^2}\,\vec{\omega} = \frac{1}{4}\vec{\omega}$ e $|\vec{v}_M| = \frac{1}{2}$. $\square$

Esercizio 7. Nel riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, comporre i seguenti stati cinetici

$$\vec{v}_i(P) = \vec{\omega}_i \times (P - O_i), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

dove

$$\begin{array}{llll} O_1\,(0,0,1) & O_2\,(0,1,0) & O_3\,(1,0,0) & O_4\,(0,0,0) \\ \vec{\omega}_1\,(3,1,0) & \vec{\omega}_2(1,-5,0) & \vec{\omega}_3\,(-1,2,0) & \vec{\omega}_4\,(-3,2,0) \end{array}$$

e determinare lo stato cinetico risultante.

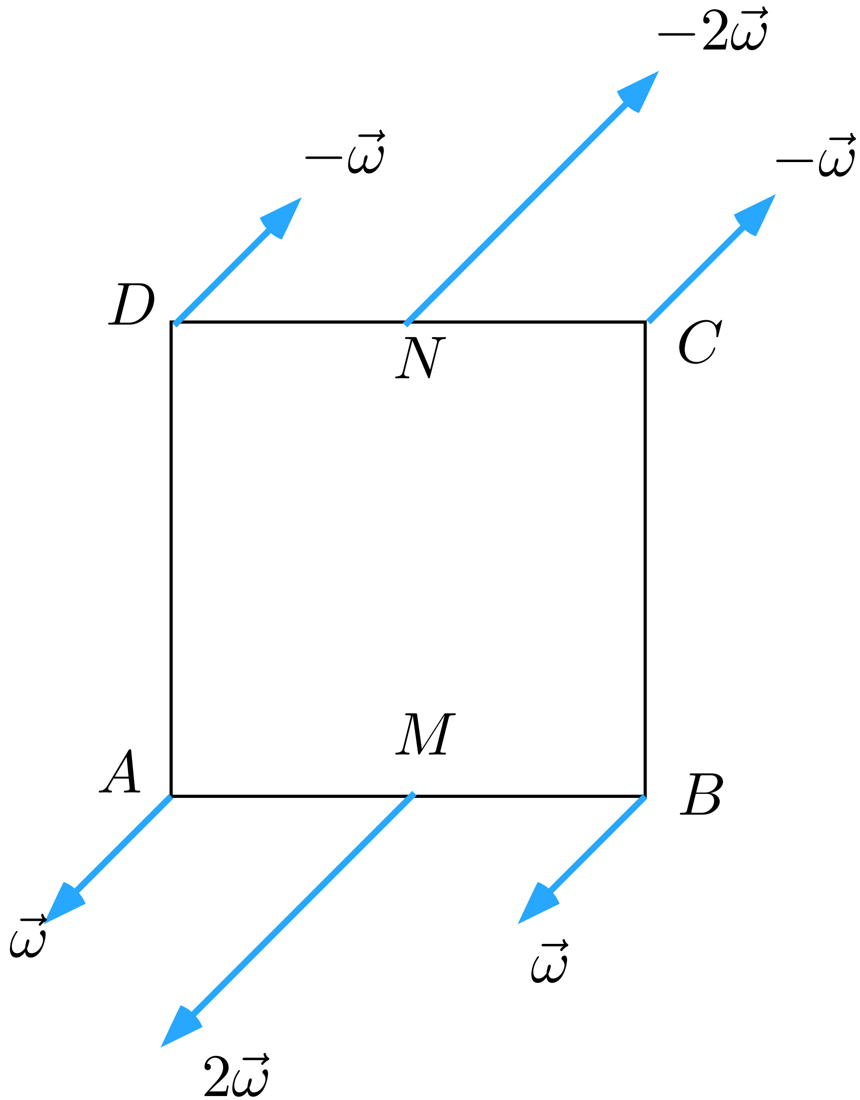
Risoluzione. Preso $P \equiv O$, si ha

$$\vec{v}_O = \sum_{i=1}^{4} \vec{v}_i = (-1, 3, 1) \neq \vec{0}\,.$$

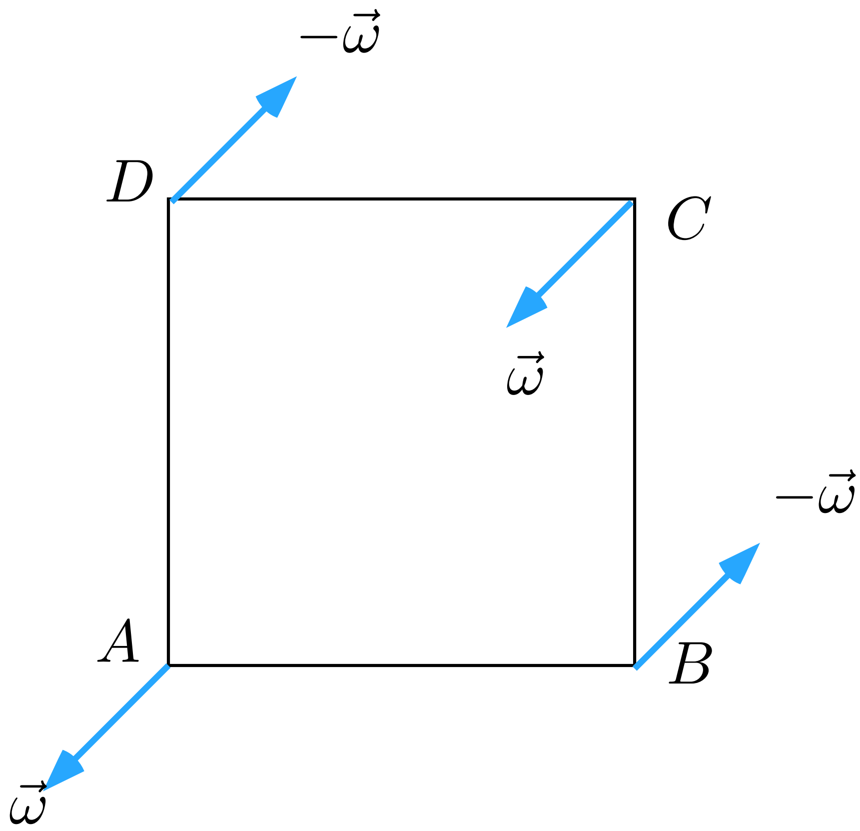
Inoltre $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{4} \vec{\omega}_i = \vec{0}$. Si ha $I = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} = 0$. Lo *stato cinetico risultante* è *traslatorio*. $\square$

Esercizio 8. Dati $(A, \vec{\omega})$, $(B, \vec{\omega})$, $(C, -\vec{\omega})$, $(D, -\vec{\omega})$, dove A, B, C, D sono i vertici di un quadrato di lato l ed $\vec{\omega}$ è ortogonale al quadrato, determinare lo stato cinetico risultante.

Risoluzione. $(A, \vec{\omega}) + (B, \vec{\omega}) \Rightarrow$ s.c. rotatorio $(M, 2\vec{\omega})$.
$(C, -\vec{\omega}) + (D, -\vec{\omega}) \Rightarrow$ s.c. rotatorio $(N, -2\vec{\omega})$.
$(M, 2\vec{\omega}) + (N, -2\vec{\omega}) \Rightarrow$ s.c. traslatorio definito da
$\vec{v} = 2\vec{\omega} \times (N - M)$. □


$-2\vec{\omega}$
$-\vec{\omega}$
$-\vec{\omega}$
D
N
C
M
A
B
$\vec{\omega}$
$\vec{\omega}$
$2\vec{\omega}$

Esercizio 9. Dati $(A, \vec{\omega})$, $(B, -\vec{\omega})$, $(C, \vec{\omega})$, $(D, -\vec{\omega})$, dove A, B, C, D sono i vertici di un quadrato di lato l ed $\vec{\omega}$ è ortogonale al quadrato, determinare lo stato cinetico risultante.



Risoluzione. $(A, \vec{\omega}) + (B, -\vec{\omega}) \Rightarrow$ s.c. traslatorio definito da $\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times (B - A)$.

$(C, \vec{\omega}) + (D, -\vec{\omega}) \Rightarrow$ s.c. traslatorio definito da $\vec{v}_2 = \vec{\omega} \times (D - C)$.

Componendo i due s.c. traslatori

$$\begin{aligned}\vec{v} =& \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{\omega} \times (B - A) + \vec{\omega} \times (D - C) \\ =& \vec{\omega} \times (B - A) - \vec{\omega} \times (B - A) = \vec{0}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ s.c. risultante nullo. $\square$