Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Cinematica

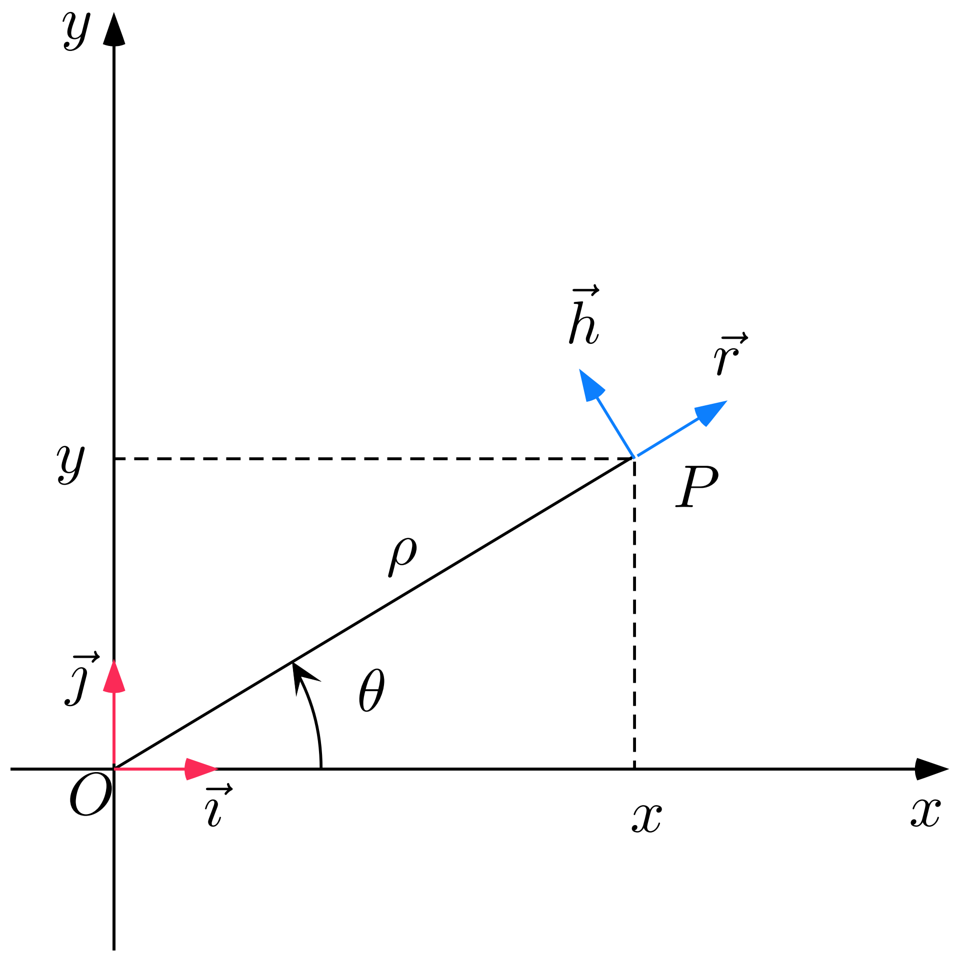
Maria Grazia Naso

naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

Espressione della velocità in coordinate polari e cilindriche

- Nel piano



- Coordinate cartesiane ortogonali: $P = P(x, y)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} (P - O) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} \\[1em] \vec{v}_P = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath}. \end{array}}$$

- Coordinate polari: $P = P(\rho, \theta)$, dove
  ρ *raggio vettore*, θ *anomalia*.
  Il moto di P è descritto da $\rho = \hat{\rho}(t)$, $\theta = \hat{\theta}(t)$.
  ▷ $\rho = \hat{\rho}(\theta)$ equazione polare della traiettoria di P.
  Sia O il polo di riferimento del sistema, $\vec{r} = \mathrm{vers}(P - O)$ e

$$\boxed{(P - O) = \rho\,\vec{r}}$$

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(P - O) = \dot{\rho}\,\vec{r} + \rho\,\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{r} + \rho\,\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{=:\dot{\theta}}\,\frac{d\vec{r}}{d\theta}$$

essendo $\vec{r} = \vec{r}(\theta(t))$.

Rispetto ad un riferimento cartesiano ortogonale Ox_1x_2 con origine in O e asse $x_1 \equiv$ asse polare, risulta

$$\vec{r} = \cos\theta\,\vec{\imath}_1 + \sin\theta\,\vec{\imath}_2\,.$$

Posto $\vec{h} = -\sin\theta\,\vec{\imath}_1 + \cos\theta\,\vec{\imath}_2$, si ha $\vec{h} = \dfrac{d\vec{r}}{d\theta}$.

$\triangleright$ $\vec{r}$ *versore radiale*, $\vec{h}$ *versore trasversale*.

Da $\vec{r}\cdot\vec{r} = 1$, derivando rispetto a θ, si ha $\dfrac{d\vec{r}}{d\theta}\cdot\vec{r} = 0$.

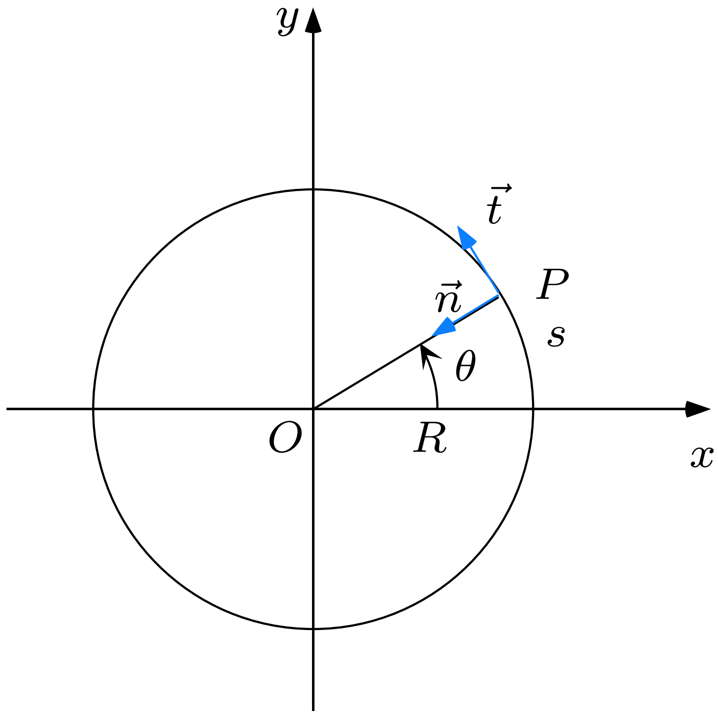
$\Rightarrow \vec{h} = \dfrac{d\vec{r}}{d\theta} \perp \vec{r}$.

Si ha

$$\boxed{\vec{v}_P = \underbrace{\dot{\rho}\,\vec{r}}_{\text{velocità radiale}} + \underbrace{\rho\,\dot{\theta}\,\vec{h}}_{\text{velocità trasversale}}}\,.$$

Caso particolare: Sia $\rho = |P - O| = R$.

- la traiettoria descritta da P è una circonferenza.
- il punto materiale P ha un *grado di libertà*:



$q := \theta$ dove $\theta = \theta(t)$,

oppure

$q := s$ dove $\boxed{s = R\,\theta(t)}$,

$\uparrow$

ascissa curvilinea

Siano

$$\vec{n} = -\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}$$
$$\vec{t} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}.$$

Risulta

$$\boxed{\begin{aligned}&(P-O) = -R\,\vec{n}(t)\\ &\vec{v}_P = R\dot{\theta}\,\vec{t}(t)\,.\end{aligned}}$$

Inoltre si ha $\vec{a}_P = R\ddot{\theta}\,\vec{t}(t) + R\dot{\theta}\,\dfrac{d\vec{t}(t)}{dt}$. Per determinare $\dfrac{d\vec{t}(t)}{dt}$:

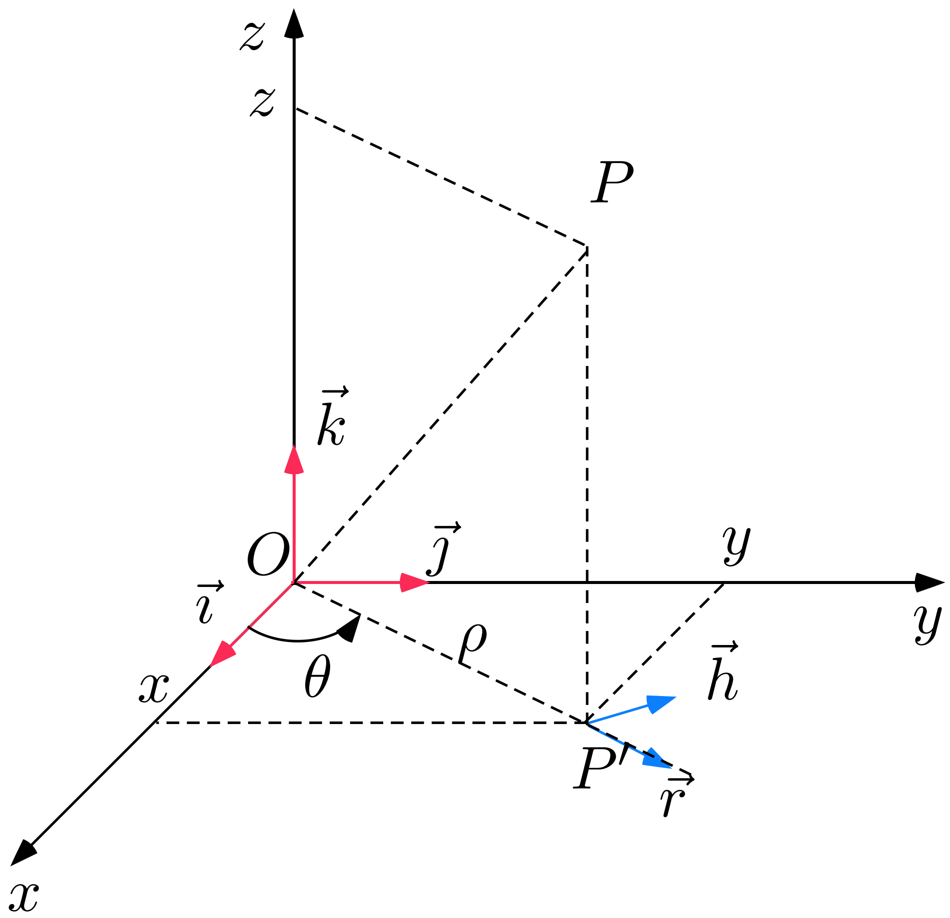
I metodo: $\dfrac{d\vec{t}(t)}{dt} = \dot{\theta}\,(-\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}) = \dot{\theta}\,\vec{n};$

II metodo: $\dfrac{d\vec{t}(t)}{dt} = \dfrac{d\vec{t}(t)}{d\theta}\,\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{n}.$

Quindi risulta $\boxed{\vec{a}_P = R\ddot{\theta}\,\vec{t}(t) + R\dot{\theta}^2\,\vec{n}}$.

▶ Terna intrinseca: $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b} := \vec{t} \times \vec{n})$.

- Nello spazio



- Coordinate cartesiane ortogonali: $P = P(x, y, z)$

$$\boxed{(P-O) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}\,, \quad \vec{v}(P) = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}}\,.$$

- Coordinate cilindriche: $P = P(\rho, \theta, z)$,

$P' :=$ proiezione ortogonale di P sul piano Oxy

$$\boxed{(P-O)} = (P-P') + (P'-O) \boxed{= \rho\,\vec{r} + z\,\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{v}(P)} = \dot{\rho}\,\vec{r} + \rho\,\frac{d\vec{r}}{dt} + \dot{z}\,\vec{k}$$

$$= \dot{\rho}\,\vec{r} + \rho\,\dot{\theta}\,\frac{d\vec{r}}{d\theta} + \dot{z}\,\vec{k} \boxed{= \dot{\rho}\,\vec{r} + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{h} + \dot{z}\,\vec{k}}\,.$$

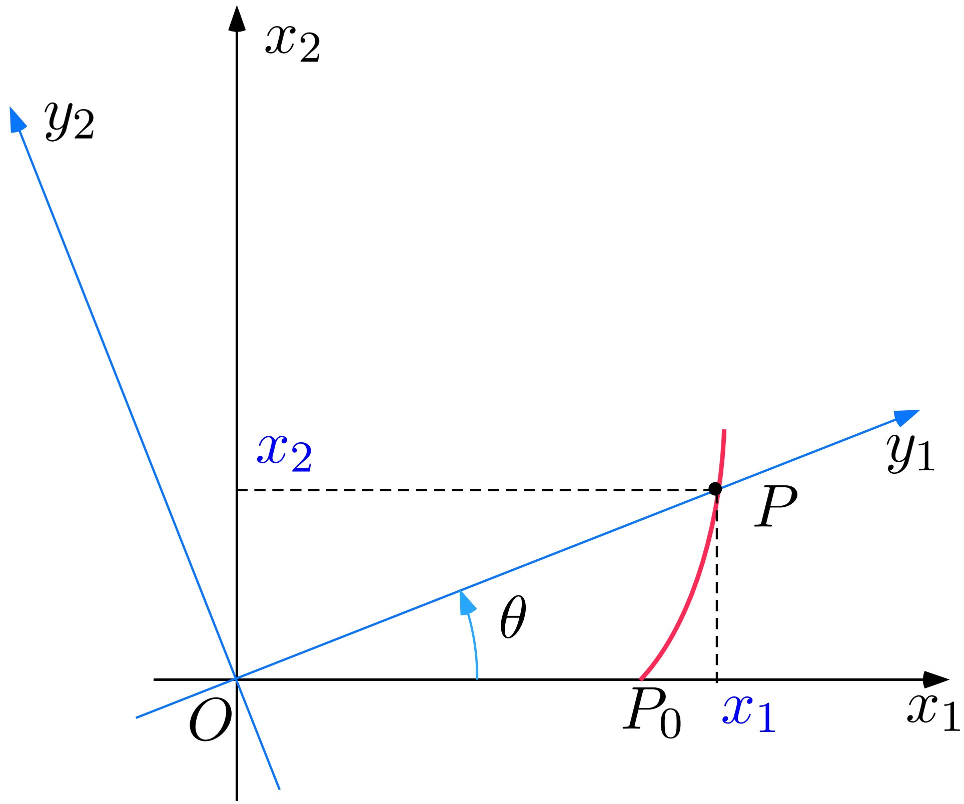
Esercizio 1. Nel riferimento cartesiano $Ox_1x_2x_3$, si consideri un punto materiale P che si muove con velocità costante $\vec{u}$ lungo una retta r

- appartenente al piano Ox_1x_2,
- passante per l'origine O del riferimento stesso,
- uniformemente rotante attorno all'asse x_3, con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega\,\vec{\imath}_3$, $\omega \in \mathbb{R}^+$.

Si supponga che inizialmente il punto materiale P abbia coordinate $(x_0, 0, 0)$ rispetto al sistema di riferimento $Ox_1x_2x_3$. Si chiede di

- calcolare la velocità e l'accelerazione di P;
- determinare l'equazione della traiettoria descritta da P durante il suo moto.

Risoluzione.



Siano $Ox_1x_2x_3$: riferimento fisso,

$Oy_1y_2y_3$: riferimento mobile (solidale con r).

Sia $x_1^+\widehat{O}y_1^+ = \theta$.

Inizialmente (i.e. per $t = 0$) si ha $x_1^+\widehat{O}y_1^+ = 0$, e quindi, da $\vec{\omega} = \omega\,\vec{\imath}_3 = \dot{\theta}\,\vec{\imath}_3$, risulta $\boxed{\theta = \omega\,t}$.

Si osservi che $(P - O) = y_1\,\vec{\jmath}_1 = (x_0 + u\,t)\,(\cos\omega t\,\vec{\imath}_1 + \sin\omega t\,\vec{\imath}_2)$.

. . . .

- Calcoliamo $\vec{v}(P)$.
- I metodo: Poiché $\vec{v}(P) = \frac{d}{dt}(P - O)$, si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{d}{dt}\left[(x_0 + u\,t)\cos\omega t\right] = u\,\cos\omega t - \omega\,\sin\omega t\,(x_0 + u\,t) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{d}{dt}\left[(x_0 + u\,t)\sin\omega t\right] = u\,\sin\omega t + \omega\,\cos\omega t\,(x_0 + u\,t)\ . \end{cases}$$

▶ <u>II metodo:</u> Per il teorema di composizione delle velocità: $\vec{v}_a(P) = \vec{v}_r(P) + \vec{v}_\tau(P)$, dove

$$\begin{aligned}
\vec{v}_a(P) =& \dot{x}_1\,\vec{\imath}_1 + \dot{x}_2\,\vec{\imath}_2\,,\\
\vec{v}_r(P) =& u\,\vec{\jmath}_1 = u\,(\cos\omega t\,\vec{\imath}_1 + \sin\omega t\,\vec{\imath}_2)\ ,\\
\vec{v}_\tau(P) =& \vec{\omega}\times(P-O) = \omega\,\vec{\imath}_3\times y_1\,\vec{\jmath}_1\\
=& -\omega\,\sin\omega t\,(x_0+u\,t)\,\vec{\imath}_1 + \omega\,\cos\omega t\,(x_0+u\,t)\,\vec{\imath}_2\,,
\end{aligned}$$

uguagliando componente a componente, si ottiene

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = u\,\cos\omega t - \omega\,\sin\omega t\,(x_0+u\,t)\\
\dot{x}_2 = u\,\sin\omega t + \omega\,\cos\omega t\,(x_0+u\,t)\ .
\end{cases}$$

▶ Determiniamo *in coordinate polari* (ρ, θ) la traiettoria descritta da P durante il suo moto.

Siano $\rho = y_1 = x_0 + u\,t$ e $\theta = \omega t$. Per i versori $\vec{r}$ e $\vec{h}$ si trovano le seguenti relazioni:

$$\vec{r} = \vec{j}_1 = \cos\omega t\,\vec{\imath}_1 + \sin\omega t\,\vec{\imath}_2$$

$$\vec{h} = \vec{j}_2 = -\sin\omega t\,\vec{\imath}_1 + \cos\omega t\,\vec{\imath}_2\,.$$

Poiché $\rho = y_1 = x_0 + u\,t = x_0 + \underbrace{\frac{u}{\omega}}_{=:\alpha_0}\theta$, l'equazione della traiettoria descritta da P durante il moto è

$$\boxed{\rho = \alpha_0\,\theta + x_0} \qquad \textit{spirale di Archimede.}$$

- Determiniamo $\vec{a}(P)$.
- <u>I metodo:</u> Si calcoli $\vec{a}(P) = \frac{d^2}{dt^2}(P - O)$.
- <u>II metodo:</u> Per applicazione del teorema di composizione delle accelerazioni

$$\vec{a}_a(P) = \vec{a}_r(P) + \vec{a}_\tau(P) + \vec{a}_c(P)\,,$$

dove

$$\begin{aligned}
\vec{a}_r(P) &= \vec{0} \quad \text{poiché } \vec{v}_r(P) \text{ è costante,} \\
\vec{a}_\tau(P) &= -\,\omega^2 (P - O) = -\omega^2\,\rho\,\vec{r} \\
\vec{a}_c(P) &= 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r(P) = 2\omega\,\vec{\imath}_3 \times u\,\underbrace{\vec{\jmath}_1}_{=\vec{r}} = 2\omega\,u\,\vec{h}
\end{aligned}$$

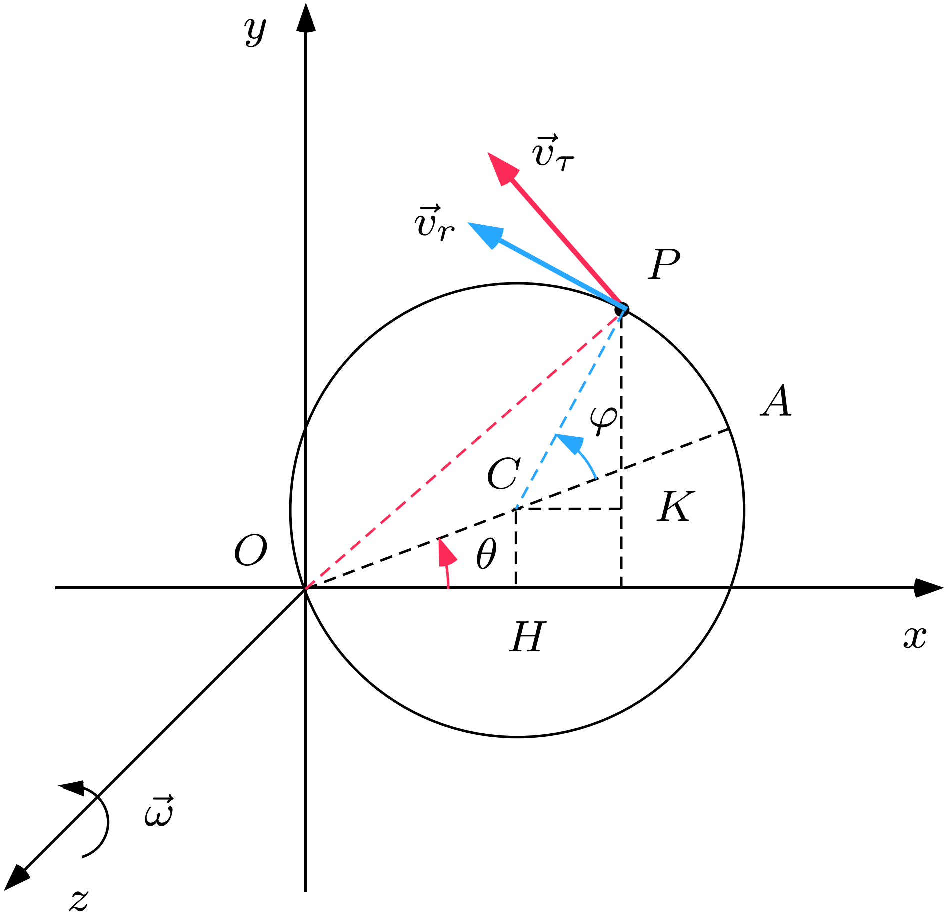
si ottiene l'espressione della accelerazione assoluta di P

- in coordinate *polari*: $\vec{a}_a(P) = -\omega^2 \rho \vec{r} + 2\omega u \vec{h}$,
- in coordinate *cartesiane*:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_a(P) &= -\omega^2 \rho \vec{r} + 2\omega u \vec{h} \\
&= \left[-\omega^2 (u\, t + x_0) \cos \omega t - 2\omega u \sin \omega t\right] \vec{\imath}_1 \\
&\quad + \left[-\omega^2 (u\, t + x_0) \sin \omega t + 2\omega u \cos \omega t\right] \vec{\imath}_2 \,.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2. Nel riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, si calcoli la velocità di un punto materiale P, mobile su una circonferenza, di centro C e raggio R, uniformemente rotante, con velocità angolare $\vec{\omega}$, nel piano Oxy attorno ad un suo punto fisso coincidente con l'origine O del riferimento. Si supponga che inizialmente C abbia coordinate $(R, 0, 0)$.

Risoluzione.



Per ipotesi $\vec{\omega} = \omega\,\vec{i}_3$, $\omega \in \mathbb{R}^+$. Indichiamo con $x^+\widehat{O}C = \theta$, $A\widehat{C}P = \varphi$, dove A è il punto sulla circonferenza diametralmente opposto ad O. In particolare, si ha $\theta = \omega t$.

Calcoliamo la velocità di P nel riferimento $Oxyz$ mediante

(a) il metodo cartesiano;

(b) il teorema di composizione delle velocità.

. . . .

(a) Si osservi che $(P-O) = (P-C) + (C-O)$, quindi si ha

$$\begin{cases} x_P = R\cos\theta + R\cos(\theta+\varphi) \\ y_P = R\sin\theta + R\sin(\theta+\varphi)\,. \end{cases}$$

La velocità di P, $\vec{v}(P) = \dot{x}_P\,\vec{\imath} + \dot{y}_P\,\vec{\jmath}$, ha componenti

$$\begin{cases} \dot{x}_P = -R\dot{\theta}\,\sin\theta - R(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin(\theta+\varphi) \\ \dot{y}_P = R\dot{\theta}\,\cos\theta + R(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\cos(\theta+\varphi) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_P = -R\omega\,\sin\omega t - R(\omega+\dot{\varphi})\sin(\omega t+\varphi) \\ \dot{y}_P = R\omega\,\cos\omega t + R(\omega+\dot{\varphi})\,\cos(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

da cui

$$v^2(P) = \dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 = \left[\omega^2 + (\omega+\dot{\varphi})^2 + 2\omega(\omega+\dot{\varphi})\cos\varphi\right] R^2\,.$$

(b) Si consideri $\vec{v}(P) := \vec{v}_a(P) = \vec{v}_r(P) + \vec{v}_\tau(P)$, dove

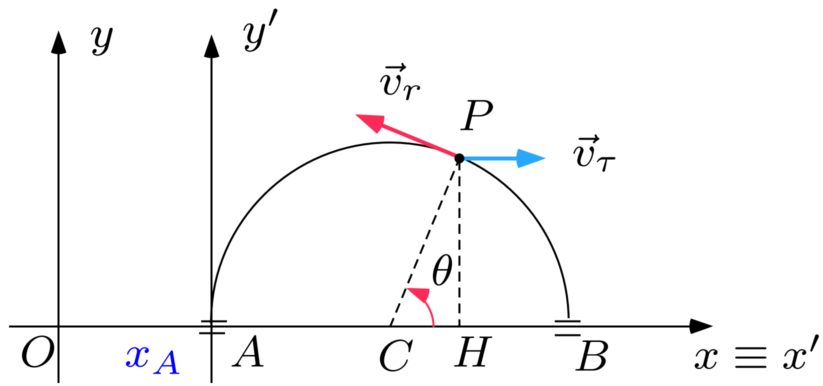
$$\begin{aligned}\vec{v}_r(P) =& R\,\dot{\varphi}\,\vec{t}\\ \vec{v}_\tau(P) =& \vec{\omega} \times (P - O) = \overline{OP}\,\dot{\theta}\,\vec{h} = 2\omega\,R\,\cos\frac{\varphi}{2}\,\vec{h}\,.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}v_a^2 =& \left[\vec{v}_r(P) + \vec{v}_\tau(P)\right] \cdot \left[\vec{v}_r(P) + \vec{v}_\tau(P)\right]\\ =& v_r^2(P) + v_\tau^2(P) + 2\,v_r(P)\,v_\tau(P)\cos\left(\vec{v}_r(P), \vec{v}_\tau(P)\right)\\ =& R^2\dot{\varphi}^2 + 4\omega^2 R^2\,\cos^2\frac{\varphi}{2} + 4\omega R^2\dot{\varphi}\cos^2\frac{\varphi}{2}\\ =& \left[\omega^2 + (\dot{\varphi} + \omega)^2 + 2\omega(\dot{\varphi} + \omega)\cos\varphi\right] R^2\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3. Nel riferimento cartesiano $Oxyz$, si calcoli la velocità e l'accelerazione di un punto materiale P mobile su una semicirconferenza, di centro C e raggio R. Gli estremi A e B del diametro orizzontale della semicirconferenza sono vincolati a scorrere con velocità $\vec{u}$ costante lungo la guida orizzontale x. Si supponga che inizialmente A coincida con l'origine O del riferimento.

Risoluzione.



Siano $x_A = \xi \in \mathbb{R}$, $x^+ \widehat{C} P = \theta \in [0, \pi]$.

Per ipotesi si ha $\vec{v}(A) = \vec{u} = u\,\vec{\imath}$, $u \in \mathbb{R}$. Pertanto, risulta

$$\begin{cases} \dot{\xi} = u \\ \xi(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \xi(t) = u\,t\,.$$

Calcoliamo la velocità e l'accelerazione di P nel riferimento $Oxyz$ mediante

(a) il metodo cartesiano;

(b) il teorema di composizione delle velocità ed il teorema di composizione delle accelerazioni.

. . . .

(a) Si osservi che $(P - O) = (P - C) + (C - O)$. Quindi si ha

$$\begin{cases} x_P = \xi + R + R\cos\theta = u\,t + R + R\cos\theta \\ y_P = R\sin\theta\,. \end{cases}$$

Poiché

$$\vec{v}(P) = \frac{d}{dt}(P - O) = \dot{x}_P\,\vec{\imath} + \dot{y}_P\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{a}(P) = \frac{d^2}{dt^2}(P - O) = \ddot{x}_P\,\vec{\imath} + \ddot{y}_P\,\vec{\jmath},$$

si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_P = u - R\,\dot{\theta}\,\sin\theta \\ \dot{y}_P = R\,\dot{\theta}\,\cos\theta\,, \end{cases} \Rightarrow\; v^2(P) = u^2 + R^2\,\dot{\theta}^2 - 2R\,u\,\sin\theta\,\dot{\theta}\,,$$

e

$$\begin{cases} \ddot{x}_P = -R\left(\ddot{\theta}\,\sin\theta + \dot{\theta}^2\,\cos\theta\right) \\ \ddot{y}_P = R\left(\ddot{\theta}\,\cos\theta - \dot{\theta}^2\,\sin\theta\right) \end{cases} .$$

(b) Sia $Ax'y'z'$ il riferimento cartesiano scelto solidale con la semicirconferenza con $x = x'$. Si consideri $\vec{v}(P) = \vec{v}_r(P) + \vec{v}_\tau(P)$, dove

$$\vec{v}_r(P) = R\,\dot{\theta}\,\vec{t}, \quad \vec{v}_\tau(P) = u\,\vec{\imath}.$$

Pertanto si ha

$$\vec{v}(P) = R\,\dot{\theta}\,\vec{t} + u\,\vec{\imath},$$

dove $\vec{t} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$.

Inoltre

$$
\begin{aligned}
v^2(P) &= [\vec{v}_r(P) + \vec{v}_\tau(P)] \cdot [\vec{v}_r(P) + \vec{v}_\tau(P)] \\
&= v_r^2(P) + v_\tau^2(P) + 2\, v_r(P)\, v_\tau(P) \cos\left(\vec{v}_r(P), \vec{v}_\tau(P)\right) \\
&= R^2\dot{\theta}^2 + u^2 + 2R\, u\, \dot{\theta} \; \underbrace{\cos\left(\vec{t}, \vec{\imath}\right)}_{=\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= R^2\dot{\theta}^2 + u^2 - 2R\, u\, \sin\theta\; \dot{\theta}\,.
\end{aligned}
$$

Per applicazione del teorema di composizione delle accelerazioni

$$\vec{a}_a(P) = \vec{a}_r(P) + \vec{a}_\tau(P) + \vec{a}_c(P)\,,$$

dove

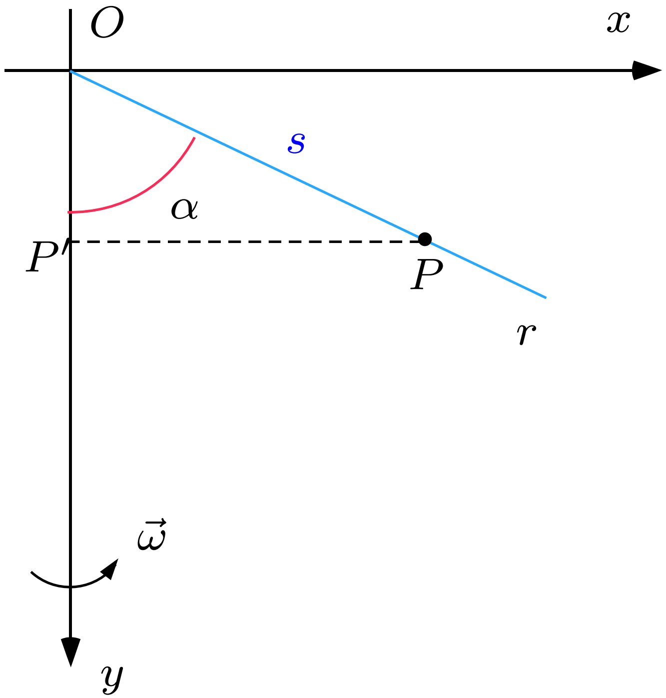
$$\vec{a}_r(P) = \ddot{s}\,\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\vec{n} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ s = R\,\theta}}{=} \quad R\,\ddot{\theta}\,\vec{t} + R\,\dot{\theta}^2\,\vec{n}\,,$$

$$\vec{a}_\tau(P) = \vec{0}\,, \qquad \text{essendo } \vec{v}_\tau(P) = \vec{u}\,,$$

$$\vec{a}_c(P) = 2\underbrace{\vec{\omega}}_{=\vec{0}}\times\vec{v}_r(P) = \vec{0}\,,$$

risulta $\vec{a}(P) = \vec{a}_r(P)$.

Esercizio 4. Si calcoli la velocità e l'accelerazione di un punto materiale P mobile su una guida rettilinea r, inclinata di un angolo α costante rispetto alla verticale y ed in rotazione uniforme attorno a tale asse con velocità angolare $\vec{\omega}$.



Risoluzione. Sia $(P - O) = s\,\vec{u}$, $s \in \mathbb{R}$. Applicando il teorema di composizione delle velocità $\vec{v}(P) = \vec{v}_r(P) + \vec{v}_\tau(P)$, dove

$$\vec{v}_r(P) = \dot{s}\,\vec{u}\,, \quad \text{e} \quad \vec{v}_\tau(P) = \vec{\omega} \times (P - P') = \omega\, s\, \sin\alpha\, \vec{t},$$

si ha $v^2(P) = \dot{s}^2 + \omega^2\, s^2\, \sin^2\alpha$.

Per applicazione del teorema di composizione delle accelerazioni, essendo

$$\begin{aligned} \vec{a}_r(P) =& \ddot{s}\,\vec{u}, \\ \vec{a}_\tau(P) =& -\omega^2 (P - P') = \omega^2\, s\, \sin\alpha\, \vec{n}, \\ \vec{a}_c(P) =& 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r(P) = 2\omega\, \dot{s}\, \sin\alpha\, \vec{t}, \end{aligned}$$

si ha $\vec{a}(P) = \ddot{s}\,\vec{u} + \omega^2\, s\, \sin\alpha\, \vec{n} + 2\omega\, \dot{s}\, \sin\alpha\, \vec{t}$.

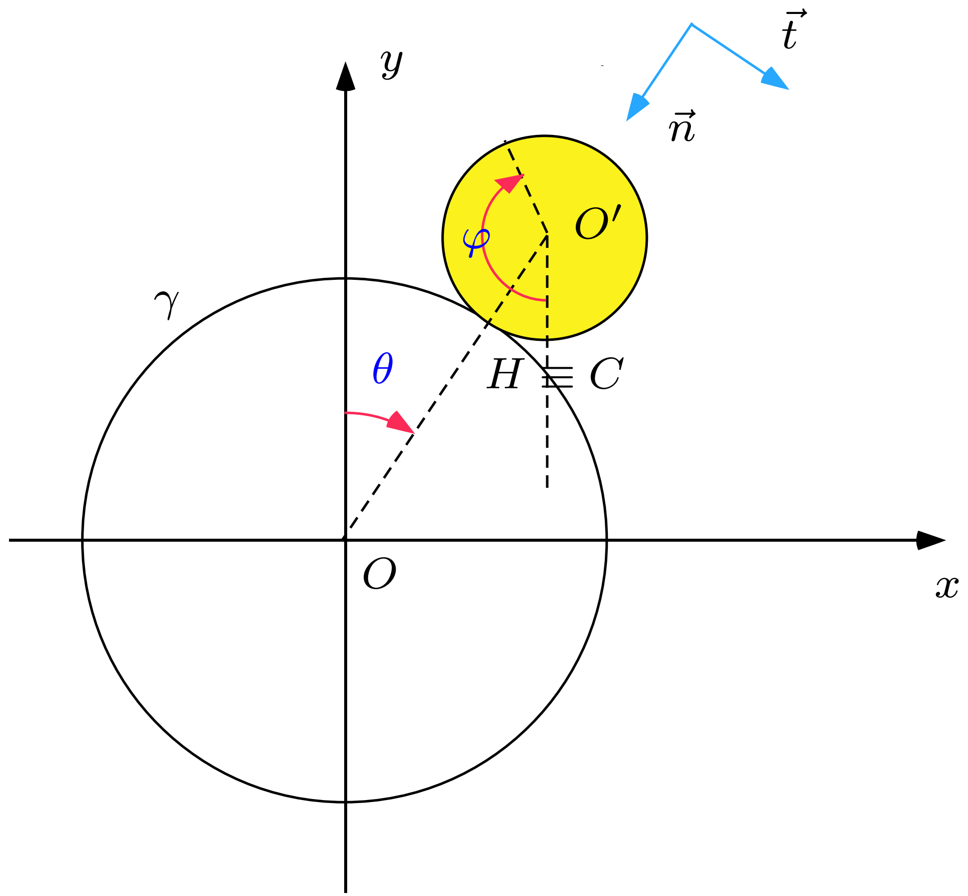
Esercizio 5 *(Moto epicicloidale).* Si consideri il moto di un disco, di centro O' e raggio r, che rotola senza strisciare su un profilo circolare γ di centro O e raggio R. Il disco ed il profilo circolare giacciono su uno stesso piano α. Scelto su α un riferimento cartesiano fisso Oxy, si studi il moto di un punto P del disco nel caso in cui, rispetto ad Oxy,

(a) γ sia fisso;

(b) γ sia mobile.

Risoluzione.

(a)



Siano $y^+\widehat{O}H = \theta$: angolo geometrico

$y^-\widehat{O'}P = \varphi$: angolo di rotazione propria del disco,

dove H è il punto di contatto tra disco e profilo circolare.

N.B. θ e φ sono tra loro *dipendenti*: il disco ha *un solo grado di libertà*.

Infatti si osservi che:

- Il centro O' del disco, pensato come punto della semiretta uscente da O e passante per O', si muove di moto circolare uniforme, descrivendo la traiettoria circolare, di centro O e raggio $\overline{OO'} = R + r$. Pertanto si ha

$$\vec{v}_{O'} = (R + r)\dot{\theta}\,\vec{t}\,. \tag{1}$$

- Ma

$$\vec{v}_{O'} = \vec{v}_H + \vec{\omega}_D \times (O' - H)\,.$$

Il disco *rotola senza strisciare su* $\gamma \Rightarrow$
$H \equiv C$ centro di istantanea rotazione del disco $\Rightarrow \vec{v}_H = \vec{0}$

$$\Rightarrow\ \vec{v}_{O'} = \vec{\omega}_D \times (O' - H) = -\dot{\varphi}\,\vec{k} \times (-r\,\vec{n}) = r\,\dot{\varphi}\,\vec{t}\,. \tag{2}$$

Confrontando (1) con (2) si ha

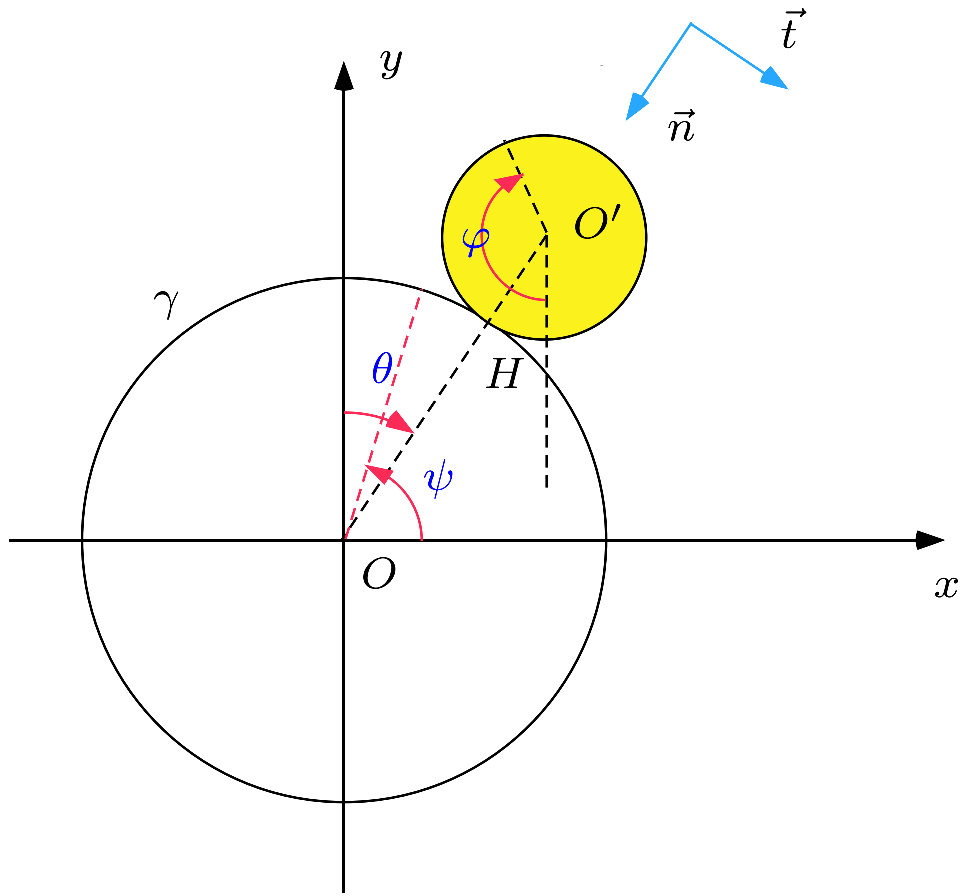
$$(R+r)\dot{\theta} = r\,\dot{\varphi} \;\Rightarrow\; \dot{\theta} = \frac{r}{R+r}\,\dot{\varphi}\,.$$

Supponendo che inizialmente $\theta(0) = 0$ e $\varphi(0) = 0$, risulta

$$\boxed{\theta = \frac{r}{R+r}\,\varphi}\,.$$

. . . .

(b)



Siano $y^+\widehat{O}H = \theta$: angolo geometrico

$y^-\widehat{O'}P = \varphi$: angolo di rotazione propria del disco

$x^+\widehat{O}A = \psi$: angolo di rotazione propria di γ,

dove H è il punto di contatto tra disco e profilo circolare ed A è un punto scelto su γ.

N.B. θ, φ e ψ sono tra loro *dipendenti*: il disco ha *due gradi di libertà*. Infatti si osservi che:

- Analogamente al caso precedente, si ha

$$\vec{v}_{O'} = (R + r)\dot{\theta}\,\vec{t}\,. \tag{3}$$

- Se O' è pensato come punto del disco si ha $\vec{v}_{O'} = \vec{v}_{H'} + \vec{\omega}_D \times (O' - H')$, dove $H' \in$ disco.
  Il disco *rotola senza strisciare su* $\gamma \Rightarrow \vec{v}_{H'} = \vec{v}_{H''}$, dove $H'' = H'$, ma $H'' \in \gamma$. Poiché γ è in rotazione attorno all'asse Oz, si ha

$$\vec{v}_{H''} = \vec{\omega}_\gamma \times (H'' - O) = \dot{\psi}\,\vec{k} \times (-R\,\vec{n}) = -R\,\dot{\psi}\,\vec{t}\,.$$

. . . .

Pertanto

$$\vec{v}_{O'} = -R\,\dot{\psi}\,\vec{t} - \dot{\varphi}\,\vec{k} \times (-r\,\vec{n}) = (r\,\dot{\varphi} - R\,\dot{\psi})\vec{t}$$

$$\Downarrow$$

$$(R+r)\dot{\theta} = (r\,\dot{\varphi} - R\,\dot{\psi})\,.$$

Supponendo che inizialmente $\theta(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, risulta

$$(R+r)\theta = (r\,\varphi - R\,\psi) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{r\,\varphi - R\,\psi}{R+r}}.$$

. . . .

N.B.

- Nel caso (a) il centro di istantanea rotazione C del disco coincide con H punto di contatto tra disco e γ.
- Nel caso (b) $C \neq H$.

Per applicazione del Teorema di Chasles, $\vec{v}_{O'} \parallel \vec{t} \Rightarrow C \in$ retta OO'.

Sia $(C - O) = -\rho_c\,\vec{n}$. Si ha

$$\begin{aligned} \vec{v}_{O'} &= \underbrace{\vec{v}_C}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}_D \times (O' - C) = -\dot{\varphi}\,\vec{k} \times \left[(O' - O) + (O - C)\right] \\ &= -\,\dot{\varphi}\,\vec{k} \times \left[-(R + r - \rho_c)\right]\vec{n} = (R + r - \rho_c)\dot{\varphi}\,\vec{t}. \end{aligned} \tag{4}$$

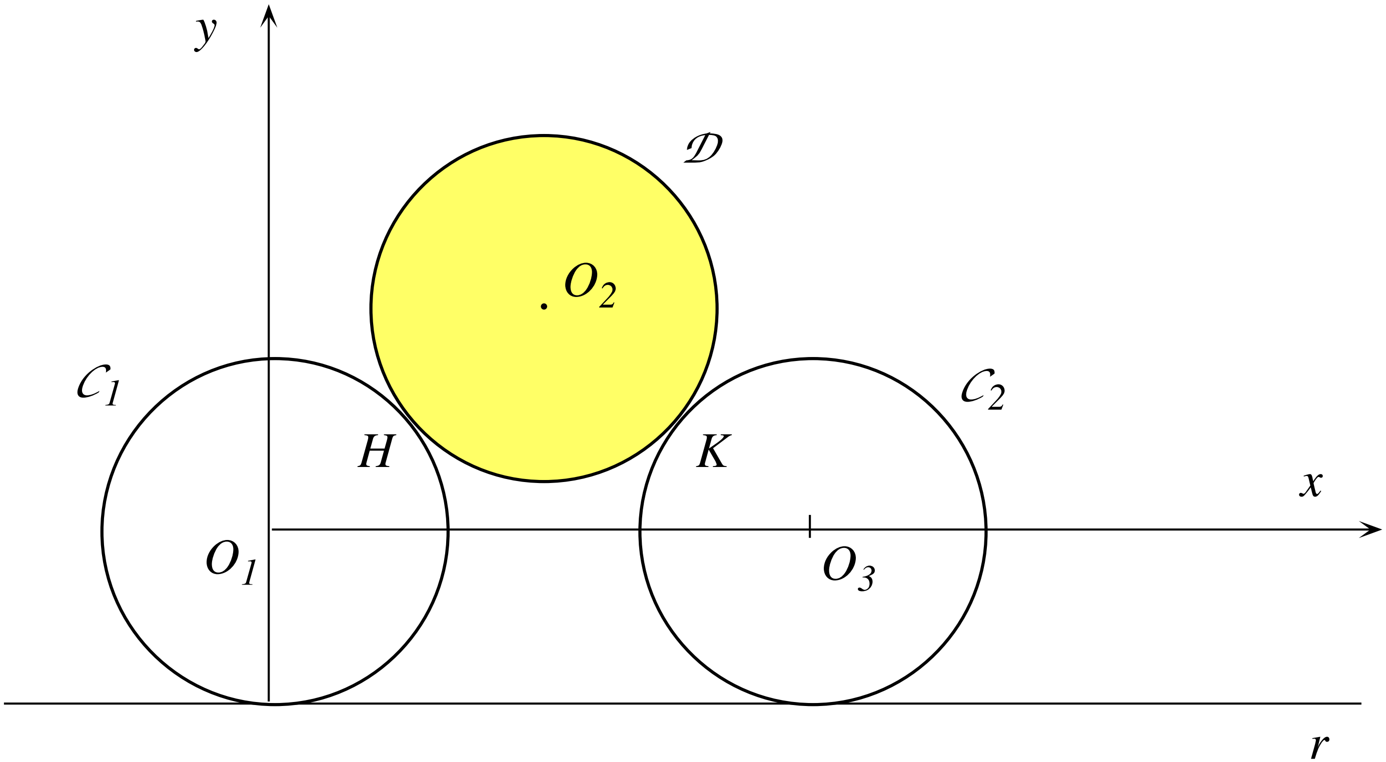
Come già calcolato, si ha

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_{O'} =& \vec{v}_{H'} + \vec{\omega}_D \times (O' - H') = \vec{v}_{H''} + \vec{\omega}_D \times (O' - H'') \\
=& (r\,\dot{\varphi} - R\,\dot{\psi})\vec{t}. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Confrontando (4) con (5), si ha

$$
(R + r - \rho_c)\dot{\varphi} = r\,\dot{\varphi} - R\,\dot{\psi} \;\Rightarrow\; \boxed{\rho_c = R\left(1 + \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}\right)}.
$$

Esercizio 6. Nel cinematismo descritto in figura il disco $\mathcal{D}$ (raggio R e centro O_2) rotola senza strisciare sulle circonferenze $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ (raggio R e centri O_1, O_3) che rotolano senza strisciare sulla retta fissa r. Detto C il centro di istantanea rotazione di $\mathcal{D}$, determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta.



A nessuna; **B** $x_C = x_{O_2}$; **C** $x_C = x_H$; **D** $y_C = y_{O_2}$.

Risoluzione. Siano

$$S := \text{c.i.r. di } \mathcal{C}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_H = \vec{\omega}_{\mathcal{C}_1} \times (H - S), \quad \perp HS$$

$$T := \text{c.i.r. di } \mathcal{C}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_K = \vec{\omega}_{\mathcal{C}_2} \times (K - T), \quad \perp KT$$

dove H e K sono rispettivamente i punti di contatto tra $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{D}$, e $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{D}$.

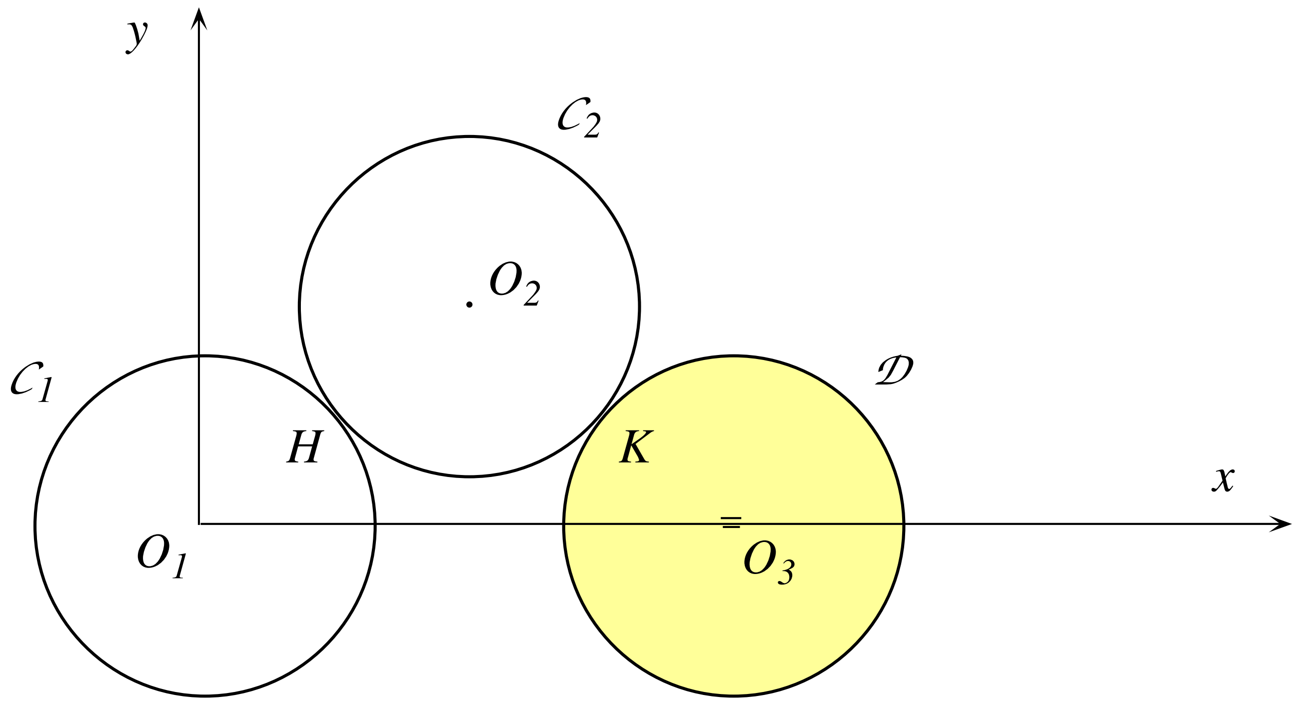
Per l'ipotesi di rotolamento senza strisciamento del disco $\mathcal{D}$ sulle circonferenze $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, si ha

$$\vec{v}_H = \vec{v}_{H'}\,, \ H' \in \mathcal{D}$$

$$\vec{v}_K = \vec{v}_{K'}\,, \ K' \in \mathcal{D}\,.$$

Il centro di istantanea rotazione $C =$ retta $SH \cap$ retta KT $\Rightarrow \boxed{\mathbf{B}}$.

Esercizio 7. Nel cinematismo descritto in figura la circonferenza $\mathcal{C}_2$ (raggio R e centro O_2) rotola senza strisciare sulla circonferenza fissa $\mathcal{C}_1$ (raggio R e centro O_1) e sul bordo del disco $\mathcal{D}$ (raggio R), il cui centro O_3 scorre su Ox. Detto C il centro di istantanea rotazione di $\mathcal{D}$, determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta.



A $y_C = y_K$; **B** nessuna; **C** $x_C = x_K$; **D** $y_C = y_{O_2}$.

Risoluzione. Siano

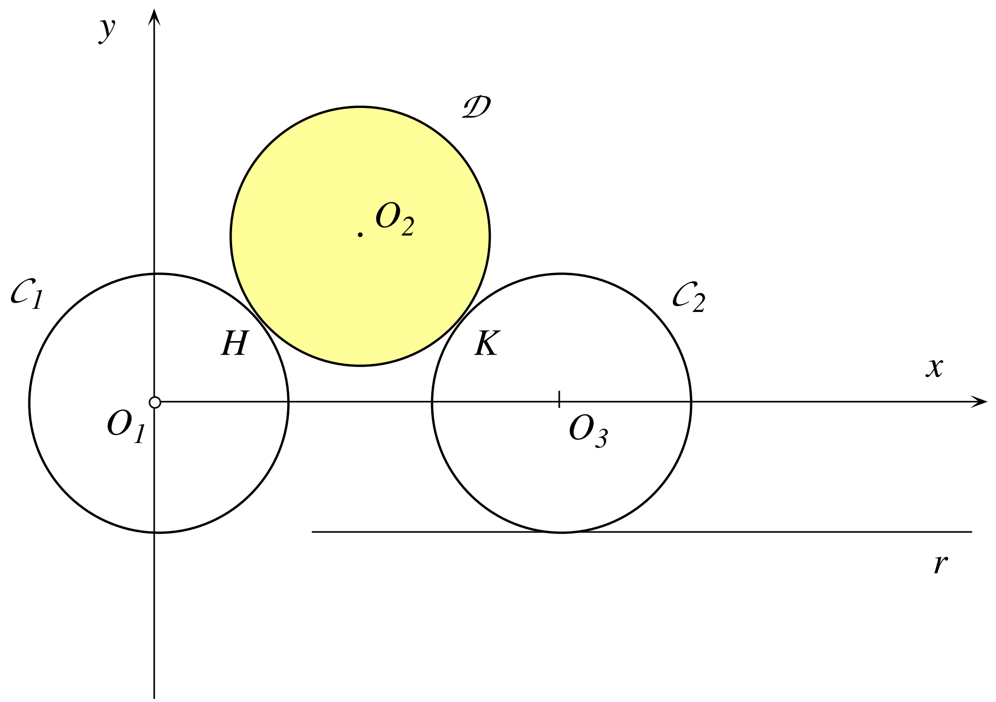
$H :=$ c.i.r. di $\mathcal{C}_2$ $\quad\Rightarrow\quad \vec{v}_K = \vec{\omega}_{\mathcal{C}_2} \times (K - H), \quad \perp KH,$

r.s.s. in K tra $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}_2$ $\quad\Rightarrow\quad \vec{v}_K = \vec{v}_{K'}$

dove H e K sono rispettivamente i punti di contatto tra $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, e $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{D}$.

Il centro di istantanea rotazione $C =$ retta $HK \cap$ retta $O_3y \Rightarrow \boxed{\mathbf{A}}$.

Esercizio 8. Nel cinematismo descritto in figura il disco $\mathcal{D}$ (raggio R e centro O_2) rotola senza strisciare sulla circonferenza $\mathcal{C}_1$ (raggio R) che ruota attorno al suo centro O_1 e sulla circonferenza $\mathcal{C}_2$ (raggio R e centro O_3) la quale rotola senza strisciare sulla retta fissa r. Detto C il centro di istantanea rotazione di $\mathcal{D}$, determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta.



A $y_C = y_K$;   **B** $x_C = x_{O_2}$;   **C** $x_C = x_H$;   **D** nessuna.

Risoluzione. Siano $O_1 :=$ c.i.r. di $\mathcal{C}_1$

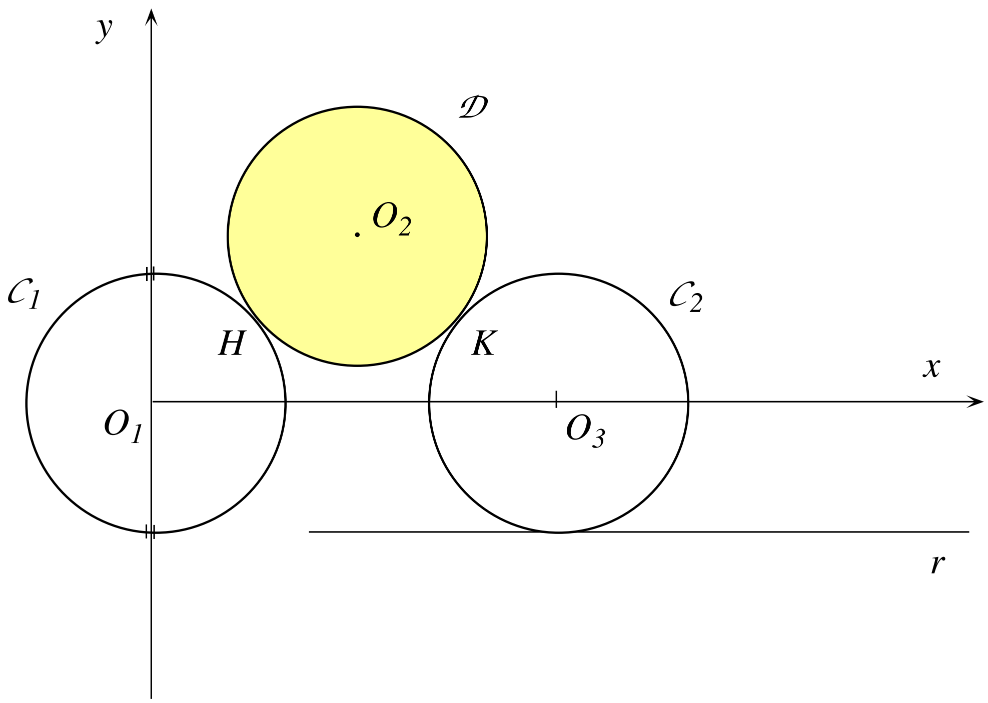
$T :=$ c.i.r. di $\mathcal{C}_2$.

r.s.s. in H tra $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}_1$ $\quad \Rightarrow \quad \vec{v}_H = \vec{v}_{H'}$, $H' \in \mathcal{D}$

r.s.s. in K tra $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}_2$ $\quad \Rightarrow \quad \vec{v}_K = \vec{v}_{K'}$, $K' \in \mathcal{D}$.

Il centro di istantanea rotazione $C =$ retta $O_1O_2 \cap$ retta $TK \Rightarrow \boxed{\mathbf{D}}$.

Esercizio 9. Nel cinematismo descritto in figura il disco $\mathcal{D}$ (raggio R e centro O_2) rotola senza strisciare sulle circonferenze $\mathcal{C}_1$ (raggio R) il cui diametro AB scorre su Oy e sulla circonferenza $\mathcal{C}_2$ (raggio R e centro O_3) la quale rotola senza strisciare sulla retta fissa r. Detto C il centro di istantanea rotazione di $\mathcal{D}$, determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta.



A $x_C = x_H$;   **B** $y_C = y_{O_2}$;   **C** $x_C = x_K$;   **D** nessuna.

Risoluzione. Siano $T :=$ c.i.r. di $\mathcal{C}_2$.

r.s.s. in H tra $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_H = \vec{v}_{H'}$, $H' \in \mathcal{D}$

r.s.s. in K tra $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_K = \vec{v}_{K'}$, $K' \in \mathcal{D}$.

Il centro di istantanea rotazione $C =$ retta $Hx \cap$ retta $TK \Rightarrow \boxed{\mathbf{C}}$.
