Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Esempi di forze conservative

Maria Grazia Naso

naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

Forze conservative

Definizione 1. Un sistema di forze posizionali $\{\hat{\mathbf{F}}_s(x)\}$ è detto conservativo nel dominio di definizione $\Omega^N \subset \mathbb{R}^{3N}$ se esiste una funzione $\mathcal{U} : \Omega^N \to \mathbb{R}$, detta potenziale, differenziabile su Ω^N e tale che

$$d\mathcal{U} = \sum_{s=1}^{N} \left[\hat{\mathbf{F}}_{s1}(x)\; dx_{s1} + \hat{\mathbf{F}}_{s2}(x)\; dx_{s2} + \hat{\mathbf{F}}_{s3}(x)\; dx_{s3} \right] = \sum_{s=1}^{N} \hat{\mathbf{F}}_s(x) \cdot d\mathbf{x}_s$$

dove $\hat{\mathbf{F}}_{sj}(x)$, $j = 1, 2, 3$, sono le componenti del vettore $\hat{\mathbf{F}}_s(x)$ e

$\Omega^N = \overbrace{\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega}^{N-\text{volte}}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Osservazione 1. $\boxed{\hat{\mathbf{F}}_{s1}(x) = \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_{s1}},\ \hat{\mathbf{F}}_{s2}(x) = \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_{s2}},\ \hat{\mathbf{F}}_{s3}(x) = \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_{s3}}}$.

Teorema 1. *Se* $\{\hat{\mathbf{F}}_s(x)\}$ *è un sistema di forze posizionali continue nel dominio* $\Omega^N \subset \mathbb{R}^{3N}$, condizione necessaria e sufficiente *affinché il sistema* $\{\hat{\mathbf{F}}_s(x)\}$ *sia conservativo è che qualunque sia la curva chiusa* γ, *contenuta in* Ω^N *risulti:*

$$\int_\gamma \sum_{s=1}^{N} \hat{\mathbf{F}}_s(x) \cdot d\mathbf{x}_s = 0\,.$$

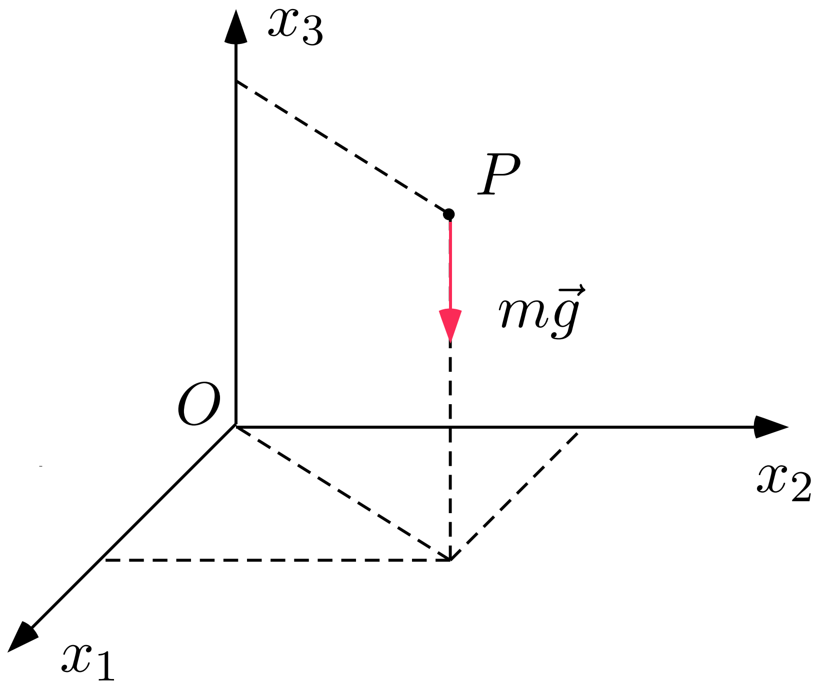
Forza peso

Consideriamo la *forza peso* $\boxed{\vec{p} = m\,\vec{g}}$. Essendo $\vec{p}$ costante, si ha

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{x} = \vec{p} \cdot \oint d\vec{x} = 0\,.$$

Quindi $\vec{p}$ conservativa.

Nel riferimento cartesiano ortogonale $Ox_1x_2x_3$ di figura,



si ha $\vec{p} = -mg\,\vec{\imath}_3$ e quindi

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_3} = -mg.$$

Il potenziale $\mathcal{U}$ della forza peso $\vec{p}$ è

$$\boxed{\mathcal{U}(x_1, x_2, x_3) = -mg\,x_3 + c}$$

dove c è una costante arbitraria.

Forza costante

Considerata $\boxed{\vec{F} = \sum_{k=1}^{3} F_k \, \vec{\imath}_k}$ con F_k, $k = 1, 2, 3$, costanti, si ha

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{x} = \vec{F} \cdot \oint d\vec{x} = 0 \, .$$

Quindi la forza costante $\vec{F}$ è conservativa e risulta

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1} = F_1 , \qquad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_2} = F_2 , \qquad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_3} = F_3 .$$

Il potenziale $\mathcal{U}$ della forza $\vec{F}$ è

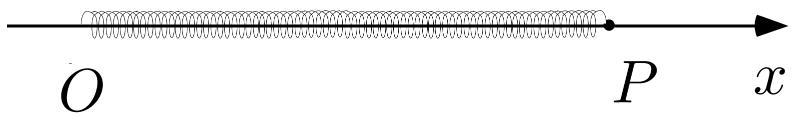
$$\boxed{\mathcal{U}(x_1, x_2, x_3) = F_1 \, x_1 + F_2 \, x_2 + F_3 \, x_3 + c}$$

dove c è una costante arbitraria.

Forza elastica

▶ Molla ideale (lineare e lunghezza a riposo nulla):

$$\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = -k\vec{x} = -k(P-O), \quad k > 0.}$$



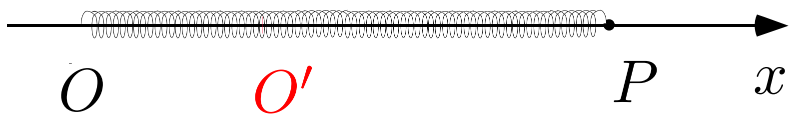
Essendo $\oint -k\vec{x}\cdot d\vec{x} = -\frac{k}{2}\oint dx^2 = 0$, la forza elastica $\vec{F}$ è conservativa. Il potenziale $\mathcal{U}$ è tale che

$$d\mathcal{U} = \vec{F}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = -k\vec{x}\cdot d\vec{x} = d\left(-k\,\frac{x^2}{2}\right).$$

Quindi $\boxed{\mathcal{U}(x) = -\frac{k}{2}\,x^2 + c}$.

▶ MOLLA CON LUNGHEZZA A RIPOSO l_0 NON NULLA:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = -k(x - l_0)\vec{\imath}, \quad k > 0.}$$



Il potenziale $\mathcal{U}$ è tale che

$$d\mathcal{U} = d\left[-k\,\frac{(x - l_0)^2}{2}\right].$$

Quindi $\boxed{\mathcal{U}(x) = -\frac{k}{2}\,(x - l_0)^2 + c}$.

▶ MOLLA AGENTE FRA DUE PUNTI MATERIALI P_1, P_2:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= -k(P_1 - P_2), \quad k > 0 \\ \vec{F}_{21} &= -k(P_2 - P_1), \quad k > 0\end{aligned}}$$

Il potenziale $\mathcal{U}$ è tale che

$$\begin{aligned} d\mathcal{U} &= -\,k(P_1 - P_2) \cdot d(P_1 - O) - k(P_2 - P_1) \cdot d(P_2 - O) \\ &= -\,k(P_1 - P_2) \cdot d(P_1 - P_2) = -\frac{k}{2}\, d|P_1 - P_2|^2 \,. \end{aligned}$$

Quindi $\boxed{\mathcal{U} = -\frac{k}{2}\,|P_1 - P_2|^2 + c}$.

Forza centrale

Definizione 2. Una forza $(P, \vec{F})$ è detta centrale se esiste un punto fisso O rispetto a cui $\vec{F}$ possa essere espressa nella forma

$$\boxed{\vec{F} = \varphi(\rho)\,\frac{(P-O)}{\rho} = \varphi(\rho)\,\vec{r}}$$

dove $\rho := |P-O|$, $\vec{r} := \frac{(P-O)}{\rho}$ e $\varphi(\cdot)$ è una funzione che ammette una primitiva $\Phi(\cdot)$.

Poiché $(P - O) = \rho\,\vec{r}$, $dP = d\rho\,\vec{r} + \rho\,d\vec{r}$, il lavoro elementare

$$dL = \vec{F} \cdot dP = \varphi(\rho)\,\vec{r} \cdot (d\rho\,\vec{r} + \rho\,d\vec{r}).$$

Essendo $\vec{r} \cdot \vec{r} = 1$ e $\vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$, si ha $dL = \varphi(\rho)\,d\rho$. Risulta

$$\boxed{\mathcal{U}(\rho) = \Phi(\rho) + c = \int \varphi(\rho)\,d\rho + c\,.}$$

▶ FORZA DI ATTRAZIONE NEWTONIANA che si esercita tra punti materiali. Consideriamo ad esempio due punti materiali (P, m) e (Q, M), il punto Q esercita su P una forza $\vec{F}$ del tipo

$$\vec{F} = \underbrace{-K\,\frac{mM}{\rho^2}}_{=\varphi(\rho)}\,\underbrace{\mathrm{vers}(P-Q)}_{=\vec{r}}$$

dove $\rho := |P - Q|$ e $K \in \mathbb{R}^+$. Quindi

$$\boxed{\mathcal{U} =}\,\mathcal{U}(\rho) = \int -K\,\frac{mM}{\rho^2}\,d\rho = \boxed{K\frac{mM}{\rho} + c}.$$

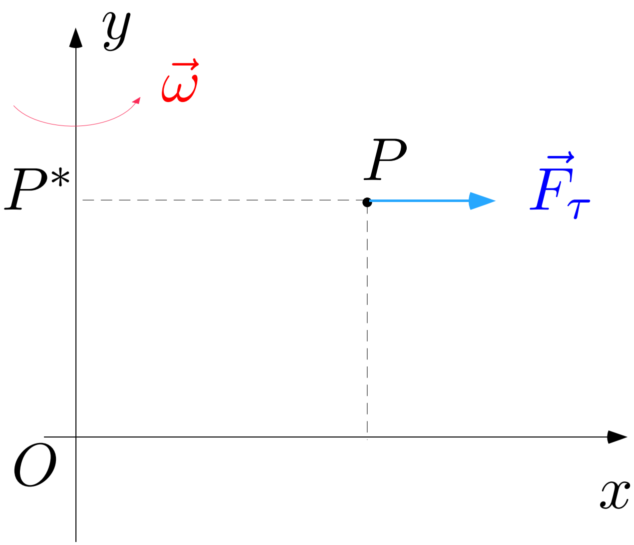
▶ Forza elettrica: Consideriamo la forza elettrica agente su una carica q posta in P e dovuta all'azione di una carica Q posta in O. Per la legge di Coulomb (se q e Q sono dello stesso segno, la forza elettrica è repulsiva) si ha

$$\vec{F}_e = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{Q\,q}{\rho^2}}_{=\varphi(\rho)}\,\vec{r}$$

dove $\rho := |P - O|$. Quindi

$$\boxed{\mathcal{U}_e =}\,\mathcal{U}_e(\rho) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{Q\,q}{\rho^2}\,d\rho = \boxed{-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{Q\,q}{\rho} + c}.$$

Definizione 3. La forza centrifuga è quella forza di trascinamento $\vec{F}_\tau = -m\,\vec{a}_\tau$, corrispondente ad un *moto di rotazione uniforme* $\vec{\omega}$ e quindi ad una accelerazione di trascinamento uguale a quella centripeta $\vec{a}_\tau = -\omega^2(P - P^*)$ dove P^* è la proiezione di P sull'asse di rotazione. Quindi



$$\boxed{\vec{F}_\tau = m\,\omega^2(P - P^*)}\,.$$

N.B. La forza centrifuga *non è una forza assoluta*, poiché cambia al variare dell'osservatore.

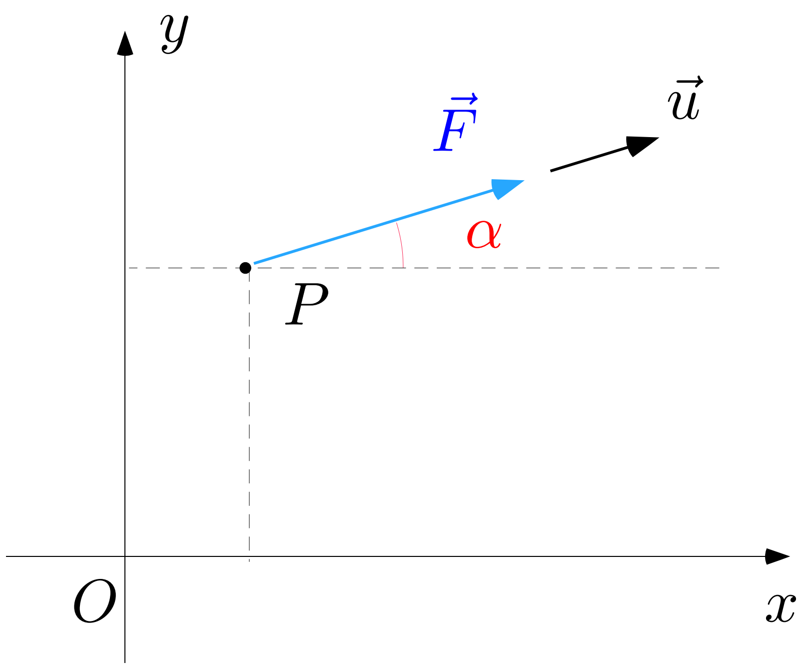
Il potenziale è

$$\boxed{\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2}\, m\omega^2\, x^2 + c},$$

dove $x := |P - P^*|$.

Forze costanti in direzione, verso e modulo

Nel piano Oxy, consideriamo



$$\begin{aligned}(P-O) &= \quad x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}\\ \vec{F} &= \quad F\,\vec{u}\\ &= \quad F\,\cos\alpha\,\vec{\imath} + F\,\sin\alpha\,\vec{\jmath}.\end{aligned}$$

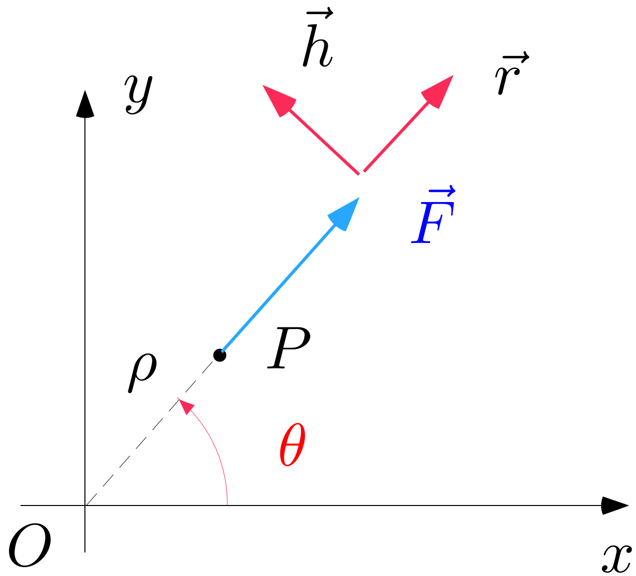
Quindi $dL = \vec{F}\cdot dP = F\,\cos\alpha\,dx + F\,\sin\alpha\,dy$ e $\oint dL = 0$. Risulta

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x} = F\,\cos\alpha\,, \qquad \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y} = F\,\sin\alpha\,,$$

e il potenziale è $\boxed{\mathcal{U}(x,y) = F\,\cos\alpha\,x + F\,\sin\alpha\,y + c}$.

Forze costanti in modulo, ma non in direzione e verso

Nel piano Oxy, consideriamo



$$
\begin{aligned}
(P - O) = &\quad \rho\, \vec{r} \\
\Rightarrow &\quad dP = d\rho\, \vec{r} + \rho\, d\theta\, \vec{h} \\
\vec{F} = &\quad F\, \vec{r}\,.
\end{aligned}
$$

Quindi $dL = \vec{F} \cdot dP = F\, d\rho$ e $\oint dL = 0$. Il potenziale risulta

$$\boxed{\mathcal{U}(\rho) =} \int F\, d\rho = \boxed{F\, \rho + c}\,.$$