Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Grandezze cinetiche

Maria Grazia Naso

naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

Esercizio 1. Nel riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ si consideri un sistema materiale (Figura 1) costituito da tre aste omogenee OA, OB, OC, ciascuna di massa m e lunghezza L, saldate in O in modo che $A\widehat{O}B = A\widehat{O}C = B\widehat{O}C = \frac{\pi}{2}$. Il sistema è incernierato in O in modo tale che l'estremo C si mantenga sull'asse z, mentre gli estremi A e B appartengono al piano Oxy. Il sistema materiale è posto in rotazione uniforme, con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno all'asse z. Si chiede di determinare:

(a) l'energia cinetica T,

(b) il momento della quantità di moto $\vec{K}_O$, rispetto al polo O,

del sistema materiale.

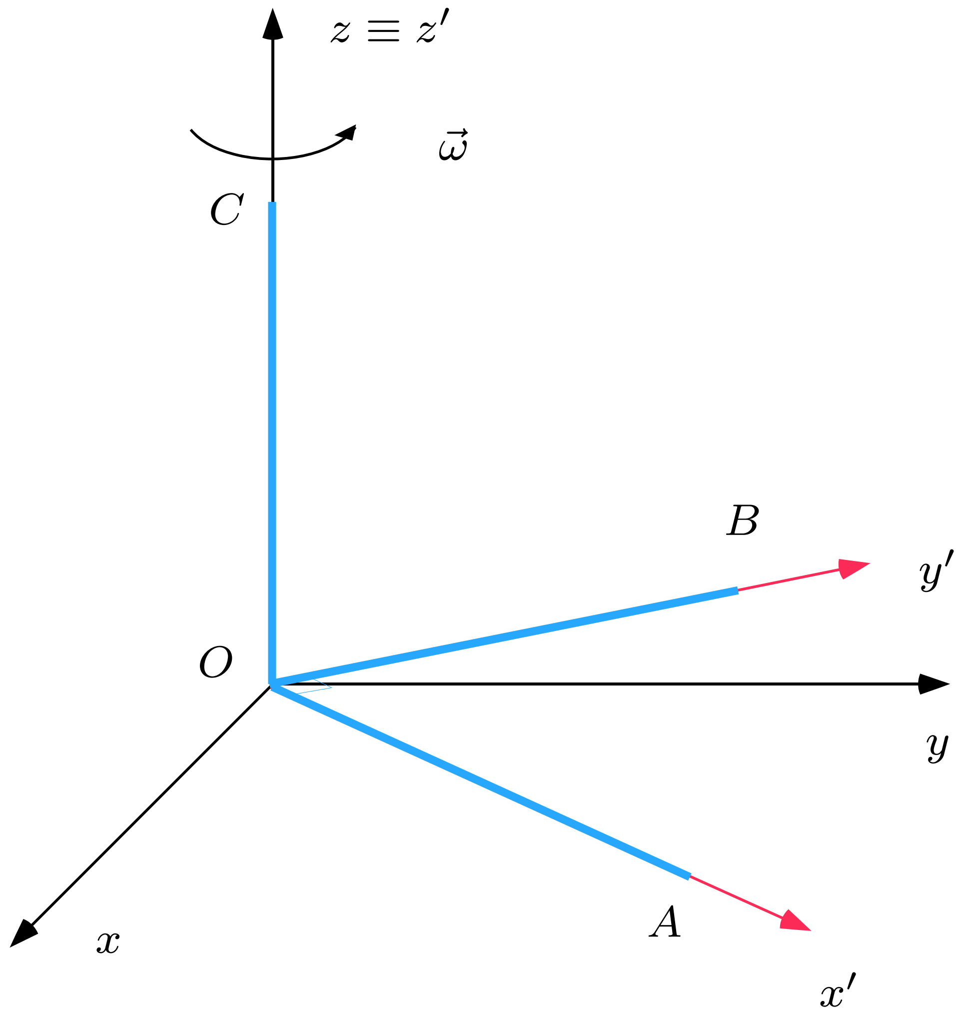

Figura 1:

Risoluzione.

▶ I metodo: Calcoliamo la matrice d'inerzia del corpo rigido rispetto al riferimento $Ox'y'z'$ (Figura 1). Poiché

$$\mathbf{I}_O(OA) = \frac{mL^2}{3}\,\mathrm{diag}\begin{bmatrix}0, & 1, & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_O(OB) = \frac{mL^2}{3}\,\mathrm{diag}\begin{bmatrix}1, & 0, & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_O(OC) = \frac{mL^2}{3}\,\mathrm{diag}\begin{bmatrix}1, & 1, & 0\end{bmatrix}\,,$$

risulta

$$\mathbf{I}_O = \frac{2mL^2}{3}\,\mathrm{diag}\begin{bmatrix}1, & 1, & 1\end{bmatrix}\,.$$

Sia $\vec{\omega} = \omega(0,0,1)$. Si tratta di determinare l'energia cinetica T ed il momento della quantità di moto $\vec{K}_O$ di un corpo rigido con asse z fisso. Pertanto si ha

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\,\mathbf{I}_O\,\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}} = \frac{1}{2}\,I_{33}^O\,\omega^2, \qquad \boxed{\vec{K}_O = \mathbf{I}_O\,\vec{\omega}} = I_{33}^O\,\omega\,\vec{k}\,.$$

Risulta $T = \dfrac{mL^2}{3}\,\omega^2$, $\vec{K}_O = \dfrac{2mL^2}{3}\,\omega\,\vec{k}$.

▶ II metodo: Si calcoli

$$T = T(OA) + T(OB) + T(OC) = \frac{1}{2}\,I_{33}^O(OA)\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,I_{33}^O(OB)\,\omega^2$$

$$= \frac{mL^2}{3}\,\omega^2$$

$$\vec{K}_O = \mathbf{I}_O(OA)\,\vec{\omega} + \mathbf{I}_O(OB)\,\vec{\omega} = \frac{2mL^2}{3}\,\omega\,\vec{k}\,. \quad \square$$

Esercizio 2. Si consideri un sistema materiale costituito da due lamine rettangolari omogenee (Figura 2) $OABC$ e $ODEF$, ciascuna di massa m e di dimensioni $\overline{OA} = \overline{OD} = a$, $\overline{AB} = \overline{DE} = b$, saldate lungo OD. Si supponga che tale sistema materiale sia posto in *rotazione uniforme* attorno all'asse Oy, con velocità angolare $\vec{\omega}$. Si chiede di determinare:

(a) l'energia cinetica T,

(b) il momento della quantità di moto $\vec{K}_O$, rispetto al polo O,

del sistema materiale.

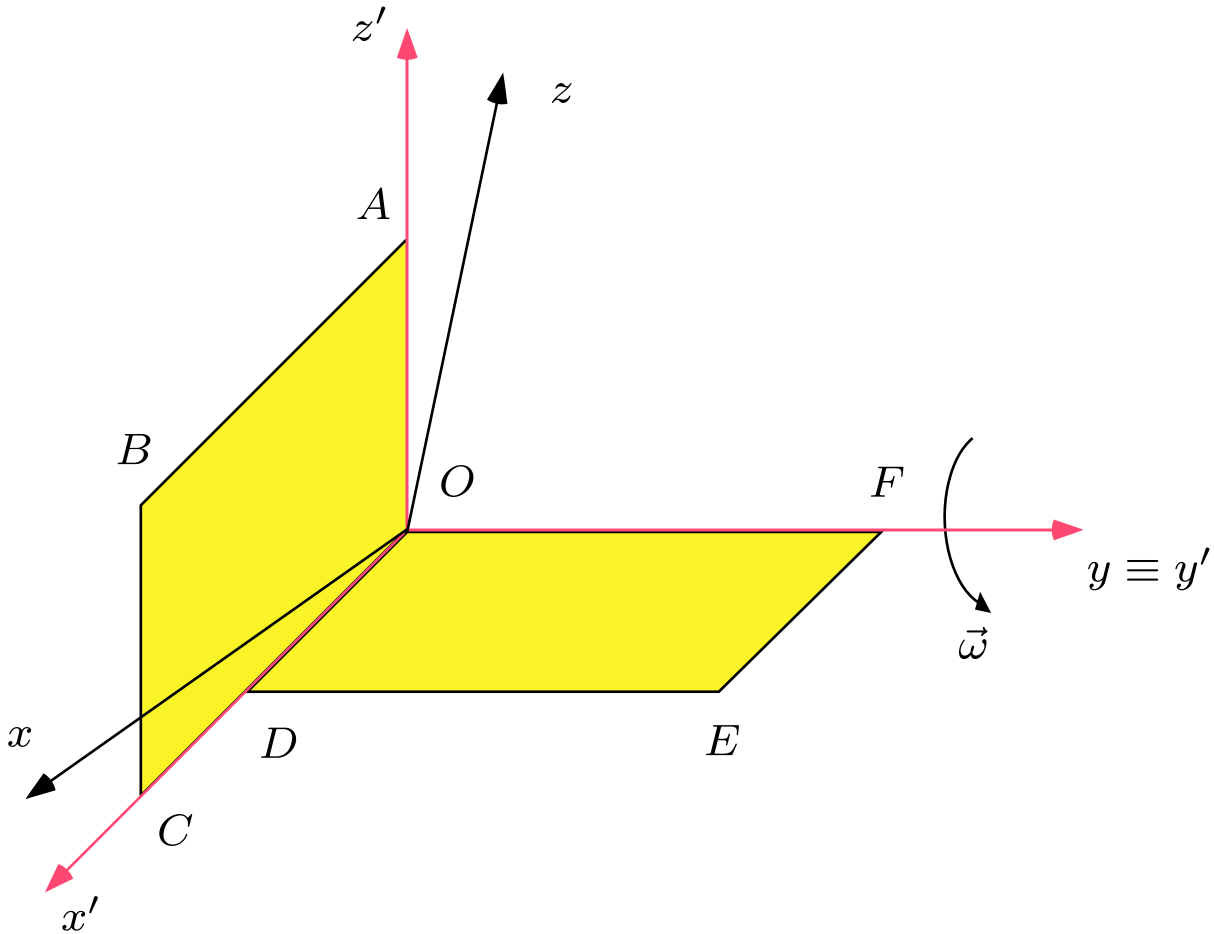

Figura 2:

Risoluzione. Calcoliamo la matrice d'inerzia del sistema materiale rispetto al riferimento $Ox'y'z'$ (Figura 2). Poiché

$$\mathbf{I}_O(OABC) = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{3} & 0 & -\frac{mab}{4} \\ 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{3} & 0 \\ -\frac{mab}{4} & 0 & \frac{mb^2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_O(ODEF) = \begin{bmatrix} \frac{mb^2}{3} & -\frac{mab}{4} & 0 \\ -\frac{mab}{4} & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{3} \end{bmatrix},$$

risulta $\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_O(ODEF) + \mathbf{I}_O(OABC)$.

Sia $\vec{\omega} = \omega(0,1,0)$. Si tratta di determinare l'energia cinetica T ed il momento della quantità di moto $\vec{K}_O$ di un corpo rigido con asse Oy fisso. Pertanto si ha

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\,\mathbf{I}_O\,\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}} = \frac{1}{2}\,I_{22}^O\,\omega^2$$

$$\boxed{\vec{K}_O = \mathbf{I}_O\,\vec{\omega}} = I_{12}^O\,\omega\,\vec{\imath} + I_{22}^O\,\omega\,\vec{\jmath}.$$

Risulta $T = \frac{1}{2}\left(\frac{2ma^2}{3} + \frac{mb^2}{3}\right)\omega^2$,

$\vec{K}_O = -\frac{mab}{4}\,\omega\,\vec{\imath} + \left(\frac{2ma^2}{3} + \frac{mb^2}{3}\right)\omega\,\vec{\jmath}.$

N.B. Poiché l'asse Oy di rotazione non è principale d'inerzia, si ha $\vec{K}_O \neq I_{22}^O\,\omega\,\vec{\jmath}$. $\square$

Esercizio 3. Si consideri una lamina triangolare omogenea $A\overset{\triangle}{O}B$ (Figura 3), di massa m e cateti $\overline{OA} = \overline{OB} = L$, in *rotazione uniforme*, con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno ad una retta r che forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con il semiasse positivo y'^{+}. Si chiede di determinare:

(a) l'energia cinetica T,

(b) il momento della quantità di moto $\vec{K}_O$, rispetto al polo O,

(c) il momento *assiale* della quantità di moto K_r, rispetto all'asse r,

del sistema materiale.

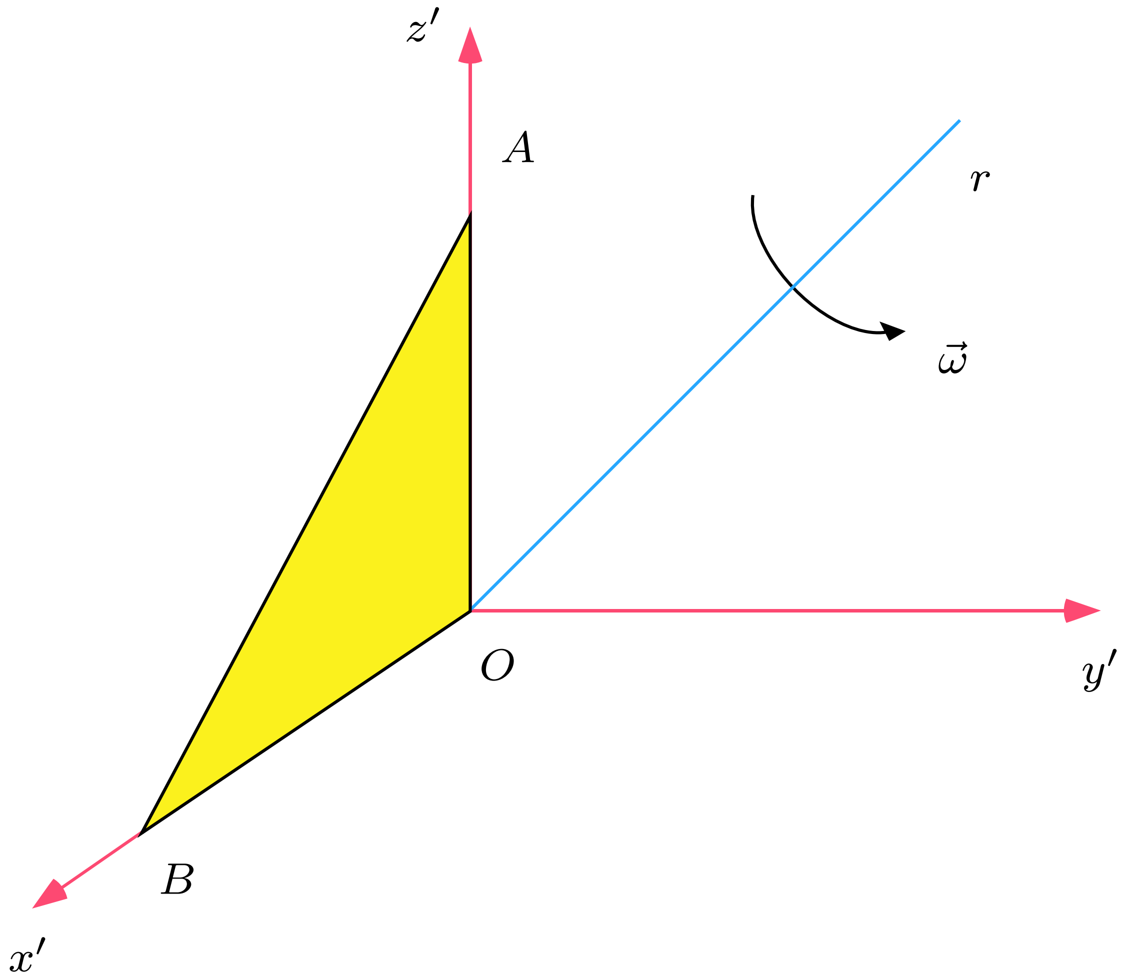

Figura 3:

Risoluzione. Calcoliamo la matrice d'inerzia del sistema materiale rispetto al riferimento $Ox'y'z'$ (Figura 3). Si trova

$$\mathbf{I}_O = mL^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Sia $\vec{\omega} = \omega \dfrac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, 1)$. Si tratta di determinare l'energia cinetica T ed il momento della quantità di moto $\vec{K}_O$ di un corpo rigido in rotazione uniforme attorno all'asse fisso r.

Si ha

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\,\mathbf{I}_O\,\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}} = \frac{1}{2}\,I_r\,\omega^2$$

$$\boxed{\vec{K}_O = \mathbf{I}_O\,\vec{\omega}},$$

dove $I_r = \mathbf{I}_O\,\vec{r}\cdot\vec{r}$. Essendo

$$\mathbf{I}_O\,\vec{r} = mL^2\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{24}\,mL^2\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

si trova $T = \dfrac{1}{8}\,mL^2\,\omega^2$.

Inoltre $\vec{K}_O = \mathbf{I}_O\,\vec{\omega} = \dfrac{\sqrt{2}}{24}\,mL^2\,\omega\,(-1,4,2)$.

Il momento assiale della quantità di moto K_r, rispetto all'asse r, è uguale a

$$\boxed{K_r = \vec{K}_O \cdot \vec{r}} = \frac{\sqrt{2}}{24}\,mL^2\,\omega\,(-1,4,2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\,(0,1,1) = \frac{1}{4}\,mL^2\omega\,.$$

$\square$

Esercizio 4. Nel piano Oyz si consideri il sistema materiale (Figura 4) costituito da due aste omogenee OA e AB, ciascuna di massa m e lunghezza L, incernierate in A. L'estremo O è incernierato nell'origine del riferimento, mentre l'estremo B è vincolato a scorrere sull'asse y. Inoltre in B è saldato un punto materiale di massa M. Si chiede di determinare:

(a) la quantità di moto $\vec{Q}$,

(b) l'energia cinetica T,

(c) il momento della quantità di moto $\vec{K}_O$, rispetto al polo O,

del sistema materiale.

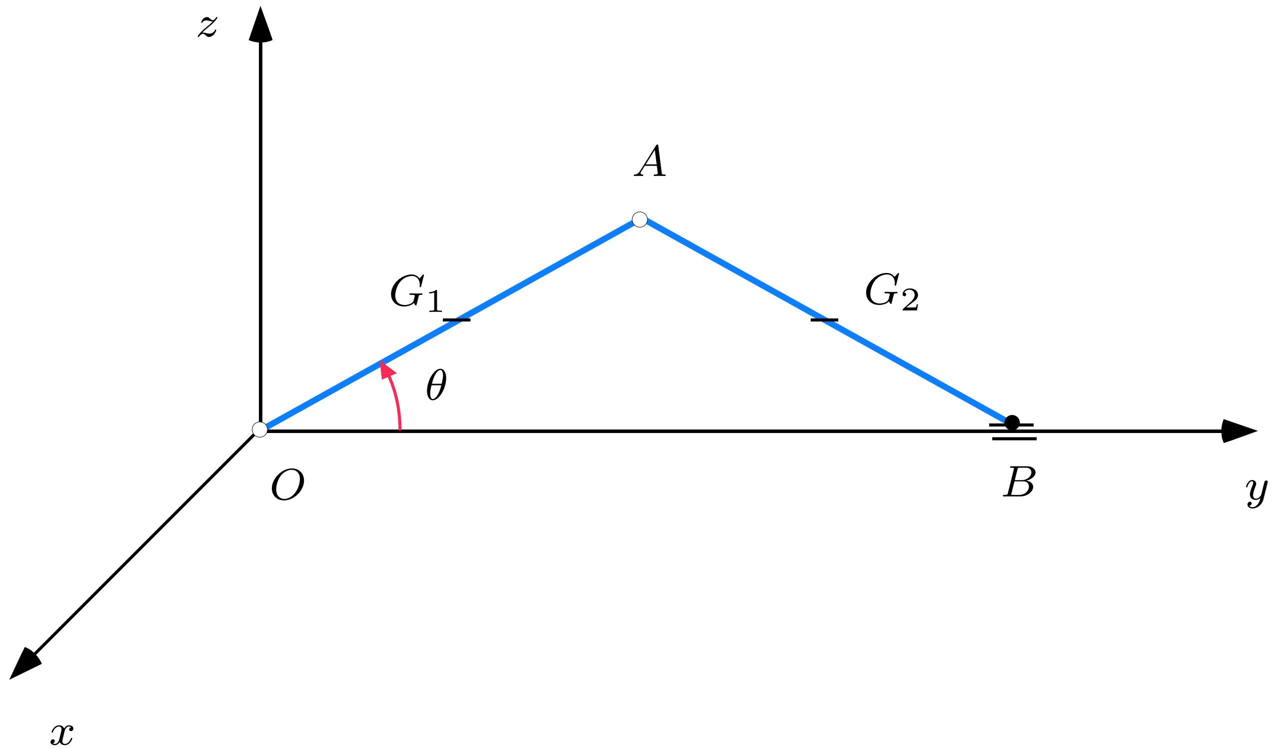

Figura 4:

Risoluzione. Il sistema ha un grado di libertà. Sia
$q := \theta = y^+\widehat{O}A \in [0, 2\pi)$.
Sia G il baricentro del sistema materiale (due aste + punto) e siano rispettivamente G_1 e G_2 i baricentri dell'asta OA e dell'asta AB.
Dalla proprietà additiva del baricentro, si ha

$$\boxed{\vec{Q} = (2m + M)\,\vec{v}_G = m\,\vec{v}_{G_1} + m\,\vec{v}_{G_2} + M\,\vec{v}_B}\,.$$

Nel riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, si hanno

$$\begin{aligned}
&G_1\left(0, \tfrac{L}{2}\cos\theta, \tfrac{L}{2}\sin\theta\right) && \Rightarrow && \vec{v}_{G_1} = \left(0, -\tfrac{L}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}, \tfrac{L}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\right)\\
&G_2\left(0, \tfrac{3L}{2}\cos\theta, \tfrac{L}{2}\sin\theta\right) && \Rightarrow && \vec{v}_{G_2} = \left(0, -\tfrac{3L}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}, \tfrac{L}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\right)\\
&B\,(0, 2L\cos\theta, 0) && \Rightarrow && \vec{v}_B = \left(0, -2L\sin\theta\,\dot{\theta}, 0\right)\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\vec{Q} = -2(m+M)L\,\sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{\jmath} + mL\,\cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{k}\,.$$

Per l'additività del momento della quantità di moto, si ha

$$\boxed{\vec{K}_O = \vec{K}_O(OA) + \vec{K}_O(AB) + \vec{K}_O(B)}\,.$$

Poiché il sistema materiale è piano, l'asse Ox, ortogonale al piano Oyz su cui giace il sistema materiale, è principale d'inerzia e $\vec{K}_O = K_O\,\vec{\imath}$. Si trovano

$$K_O(OA) = I_{11}(OA)\,\omega_{OA} = \frac{mL^2}{3}\,\dot{\theta}$$

$$K_O(B) = 0 \quad \text{(essendo } \vec{v}_B \parallel (B-O)\text{)}.$$

Inoltre

$$K_O(AB) = I_{11}^{G_2}\,\omega_{AB} + [m\,\vec{v}_{G_2} \times (O - G_2)] \cdot \vec{\imath}$$
$$= -\,\frac{mL^2}{12}\,\dot{\theta} + m\,(y_{G_2}\,\dot{z}_{G_2} - z_{G_2}\,\dot{y}_{G_2}) = \frac{2}{3}\,mL^2\,\dot{\theta}\,.$$

Risulta $\vec{K}_O = mL^2\,\dot{\theta}\,\vec{\imath}$.

L'energia cinetica del sistema materiale è

$$\boxed{T = T(OA) + T(AB) + T(B)}\,.$$

Calcoliamo

$$T(OA) = \frac{1}{2}\,I_{11}(OA)\,\omega_{OA}^2 = \frac{1}{6}\,mL^2\,\dot{\theta}^2\,,$$

$$
\begin{aligned}
T(AB) &= \frac{1}{2}\, m v_{G_2}^2 + T' = \frac{1}{2}\, m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2}\, I_{11}^{G_2}(AB)\, \omega_{AB}^2 \\
&= \frac{1}{6}\, mL^2 \left(1 + 6\, \sin^2\theta\right) \dot{\theta}^2 \,,
\end{aligned}
$$

con $v_{G_2}^2 = \dfrac{L^2}{4}\left(1 + 8\, \sin^2\theta\right) \dot{\theta}^2$ e $I_{11}^{G_2}(AB) = \dfrac{mL^2}{12}$. Inoltre

$$
T_B = \frac{1}{2}\, M v_B^2 = 2ML^2\, \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 \,.
$$

L'energia cinetica del sistema è

$$
T = \left[\frac{m}{3} + (m + 2M)\sin^2\theta\right] L^2\, \dot{\theta}^2 \,. \quad \square
$$

Esercizio 5. Nel piano Oyz si consideri (Figura 5) un disco omogeneo $\mathcal{D}_1$, di massa m, centro O' e raggio r, che *rotola senza strisciare* su un disco omogeneo $\mathcal{D}_2$, di massa M, centro O e raggio R, che *ruota attorno all'asse* Ox. Si chiede di determinare:

(a) l'energia cinetica T,

(b) il momento della quantità di moto $\vec{K}_O$, rispetto al polo O,

del sistema materiale.

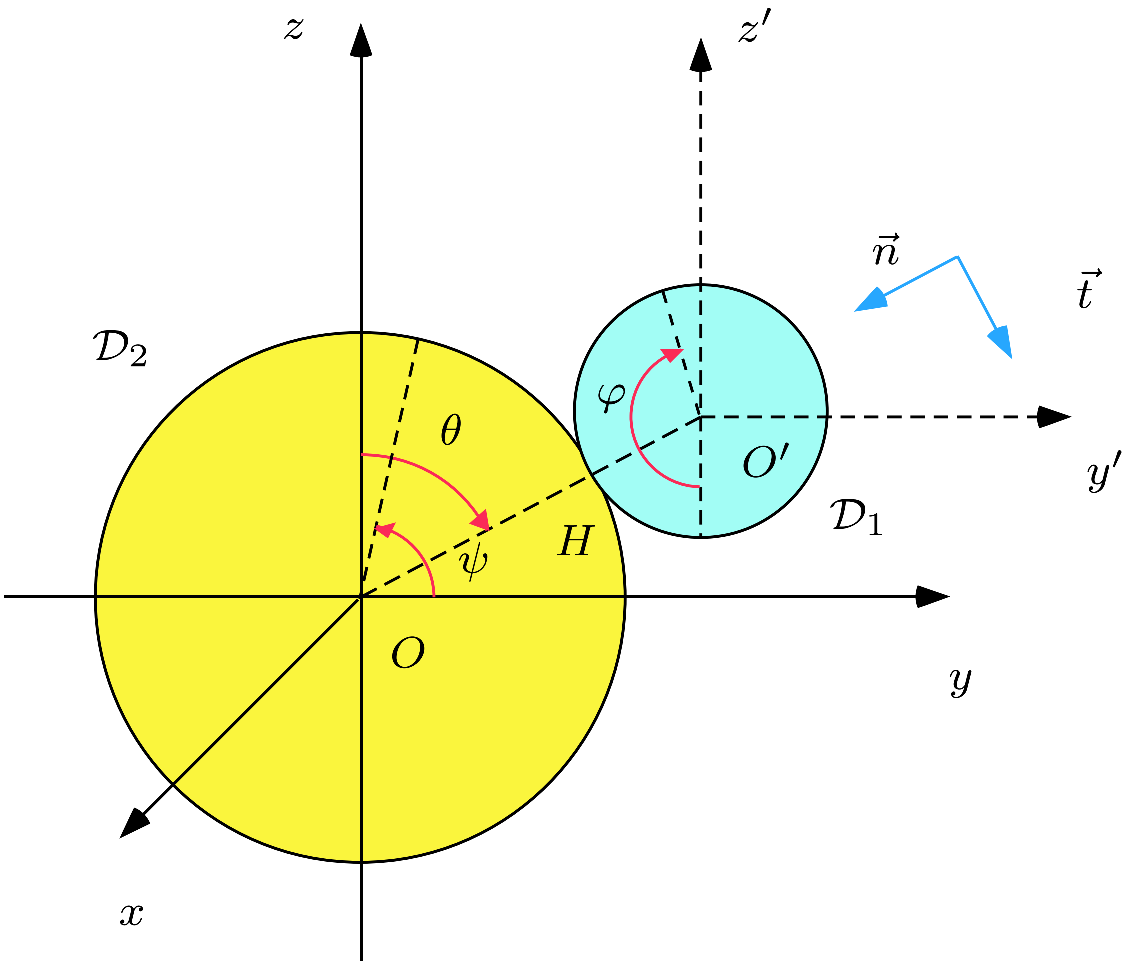

Figura 5:

Risoluzione. Indichiamo con

$$\theta = z^{+}\widehat{O}H$$

$\varphi =$ angolo di rotazione propria del disco $\mathcal{D}_1$

$\psi =$ angolo di rotazione propria del disco $\mathcal{D}_2$.

Per l'ipotesi di *rotolamento senza strisciamento* del disco $\mathcal{D}_1$ sul disco $\mathcal{D}_2$, si trova

$$\dot{\theta} = \frac{r\,\dot{\varphi} - R\,\dot{\psi}}{R + r}\,.$$

Il sistema materiale ha due gradi di libertà. Siano $q_1 := \varphi$ e $q_2 := \psi$.

Si ha $\vec{\omega}_{\mathcal{D}_1} = -\dot{\varphi}\,\vec{\imath}$ e $\vec{\omega}_{\mathcal{D}_2} = \dot{\psi}\,\vec{\imath}$.

Si ha

$$\vec{K}_O = \vec{K}_O(\mathcal{D}_1) + \vec{K}_O(\mathcal{D}_2)$$

dove

$$\begin{aligned}
\vec{K}_O(\mathcal{D}_1) &= \vec{K}_{O'}(\mathcal{D}_1) + m\vec{v}_{O'} \times (O - O') \\
&= I_{11}^{O'}(\mathcal{D}_1)\,\vec{\omega}_{\mathcal{D}_1} + m(R+r)\dot{\theta}\,\vec{t} \times (R+r)\vec{n} \\
&= \left[-\frac{mr^2}{2}\,\dot{\varphi} - m(R+r)(r\,\dot{\varphi} - R\,\dot{\psi})\right]\vec{\imath}, \\
\vec{K}_O(\mathcal{D}_2) &= I_{11}^{O}(\mathcal{D}_2)\,\vec{\omega}_{\mathcal{D}_2} = \frac{MR^2}{2}\,\dot{\psi}\,\vec{\imath}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\vec{K}_O = \left[-m\,r\left(R + \frac{3}{2}\,r\right)\dot{\varphi} + R\left(mR + mr + \frac{MR}{2}\right)\dot{\psi}\right]\vec{\imath}.$$

L'energia cinetica del sistema materiale è data da

$$T = T(\mathcal{D}_1) + T(\mathcal{D}_2)$$

dove

$$\begin{aligned} T(\mathcal{D}_1) &= \frac{1}{2} m\, v_{O'}^2 + T' \\ &= \frac{1}{2}\, m(R+r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\, \frac{mr^2}{2}\, \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{4}\, mr^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\, m\,(r\,\dot{\varphi} - R\,\dot{\psi})^2 \\ T(\mathcal{D}_2) &= \frac{1}{2}\, I_{11}^O(\mathcal{D}_2)\, \omega_{\mathcal{D}_2}^2 = \frac{MR^2}{4}\, \dot{\psi}^2\,. \end{aligned}$$

Quindi $T = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{3}{2}\, mr^2\, \dot{\varphi}^2 - 2mrR\, \dot{\varphi}\, \dot{\psi} + \left(m + \dfrac{M}{2}\right) R^2\, \dot{\psi}^2\right]$. $\square$

Esercizio 6. Nel piano Oxy si consideri (Figura 6) un disco omogeneo $\mathcal{D}$, di massa m, centro G e raggio r, che rotola senza strisciare sulla retta orizzontale x. Si calcoli l'energia cinetica T del disco.

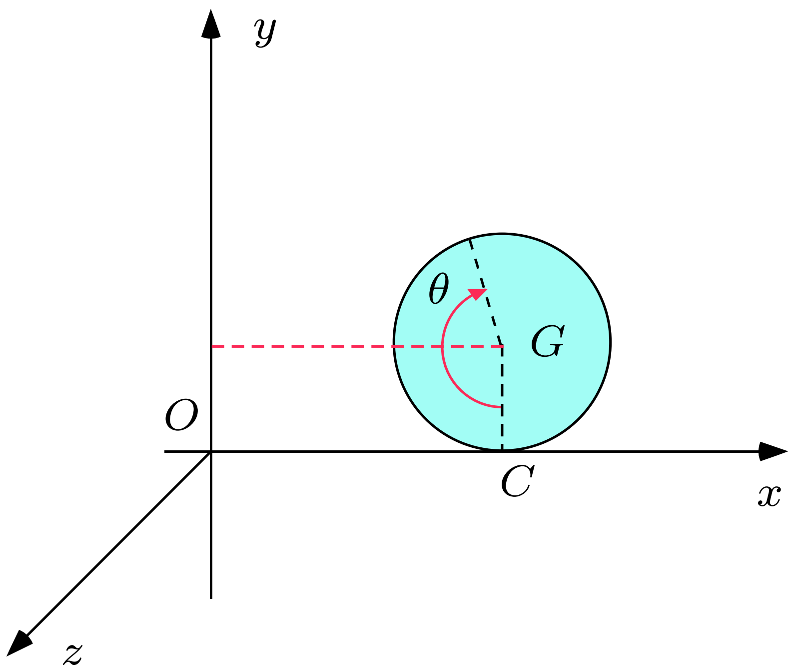

Figura 6:

Risoluzione. Il disco ha un grado di libertà. Indichiamo con $q := \theta$ l'angolo di rotazione propria del disco $\mathcal{D}_1$.

Per l'ipotesi di *rotolamento senza strisciamento* del disco, si ha

$$\dot{x}_G = r\,\dot{\theta}.$$

▶ I metodo: Per applicazione del Teorema di König, l'energia cinetica del disco è

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m\, v_G^2 + T' \\ &= \frac{1}{2}\, m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\, \frac{m r^2}{2}\, \dot{\theta}^2 = \frac{3 m r^2}{4}\, \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

▶ II metodo: Poiché C, punto di contatto tra disco e asse x, è *centro di istantanea rotazione del disco*, si ha

$$T = \frac{1}{2}\, I_{Cz}\, \dot{\theta}^2 = \frac{3mr^2}{4}\, \dot{\theta}^2\,,$$

dove (per applicazione del Teorema di Huygens)

$$I_{Cz} = I_{Gz} + m\,\overline{GC}^2 = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3mr^2}{2}. \quad \square$$

Esercizio 7. Nel piano Oxy si consideri (Figura 7) un disco omogeneo $\mathcal{D}$, di massa m, centro G e raggio R,

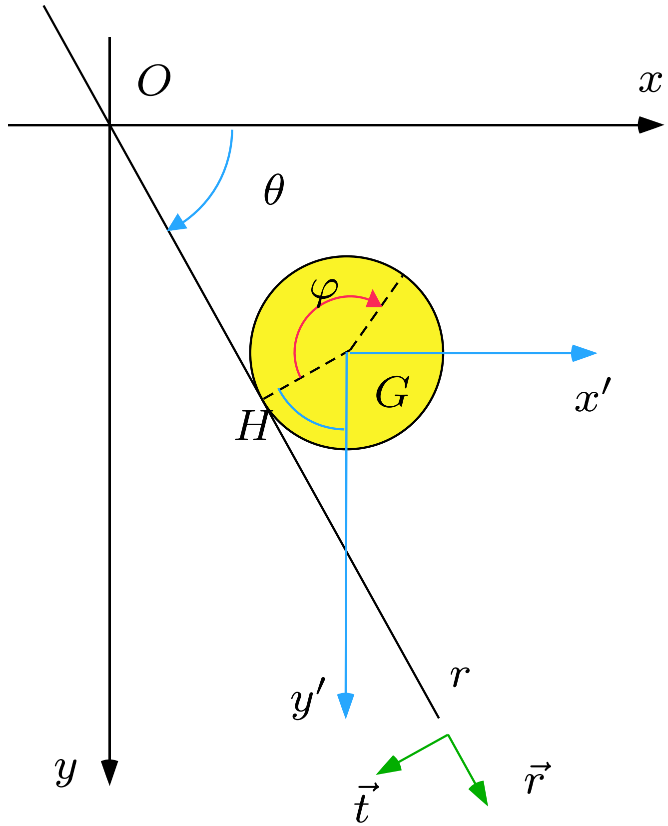

Figura 7:

che *rotola senza strisciare* su una retta r che ruota (mantenendosi comunque nel piano Oxy) attorno ad un suo punto fisso O, coincidente con l'origine del riferimento. Si calcoli l'energia cinetica T del disco.

Risoluzione. Il disco ha due gradi di libertà. Indichiamo con $q_1 := \theta = x^+ \widehat{O} r^+ \in [0, 2\pi)$ e con $q_2 := \varphi \in \mathbb{R}$ l'angolo di rotazione propria del disco $\mathcal{D}$.

N.B. Come q_2 può essere scelto anche $s = (H - O) \cdot \vec{r} \in \mathbb{R}$. Infatti, per l'ipotesi di rotolamento senza strisciamento del disco, si ha $\dot{s} = R\,\dot{\varphi}$.

Per applicazione del Teorema di König, l'energia cinetica del disco è

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\,m\,v_G^2 + T' = \frac{1}{2}\,m\,v_G^2 + \frac{1}{2}\,I_{G_z}\,\omega_{\mathcal{D}}^2}\,.$$

Calcolo di $\vec{\omega}_{\mathcal{D}}$:

Per applicazione del teorema di composizione delle velocità angolari, la velocità angolare $\vec{\omega}_{\mathcal{D}}$ del disco risulta

$$\vec{\omega}_{\mathcal{D}} = \vec{\omega}_a^{\mathcal{D}} = \vec{\omega}_r^{\mathcal{D}} + \vec{\omega}_\tau^{\mathcal{D}}$$

dove $\vec{\omega}_a^{\mathcal{D}}$, $\vec{\omega}_r^{\mathcal{D}}$, $\vec{\omega}_\tau^{\mathcal{D}}$ sono, rispettivamente, la velocità angolare assoluta, relativa e di trascinamento del disco.

In questo caso

$$\vec{\omega}_r^{\mathcal{D}} = \dot{\varphi}\,\vec{k}, \quad \vec{\omega}_\tau^{\mathcal{D}} = \dot{\theta}\,\vec{k}\,.$$

Quindi, si ha

$$\vec{\omega}_{\mathcal{D}} = \left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\right)\vec{k}\,.$$

Calcolo di v_G^2:

▶ I metodo: Dalla formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi, si ha

$$\vec{v}_G = \vec{v}_H + \vec{\omega}_{\mathcal{D}} \times (G - H)\,.$$

Per l'ipotesi di rotolamento senza strisciamento, $\vec{v}_{H'} = \vec{v}_{H''}$, dove $H' \in \mathcal{D}$ e $H'' \in r$. Ma $\vec{v}_{H''} = s\,\dot{\theta}\,\vec{t}$. Quindi

$$\vec{v}_G = s\,\dot{\theta}\,\vec{t} + \left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\right)\vec{k} \times (-R\,\vec{t}) = s\,\dot{\theta}\,\vec{t} + R\left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\right)\vec{r}\,.$$

▶ II metodo: Si ha

$$\begin{cases} x_G = s\,\cos\theta + R\,\sin\theta \\ y_G = s\,\sin\theta - R\,\cos\theta \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{s}\,\cos\theta - s\,\sin\theta\,\dot{\theta} + R\,\cos\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_G = \dot{s}\,\sin\theta + s\,\cos\theta\,\dot{\theta} + R\,\sin\theta\,\dot{\theta}\,. \end{cases}$$

Risulta $v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 = \dot{s}^2 + s^2\,\dot{\theta}^2 + R^2\,\dot{\theta}^2 + 2R\,\dot{s}\,\dot{\theta}$.

Poiché $\dot{s} = R\,\dot{\varphi}$ e supponendo che $\varphi = 0$ per $H \equiv O$, si trova $s = R\,\varphi$.

Pertanto $v_G^2 = R^2\,\dot{\varphi}^2 + R^2\,\varphi^2\,\dot{\theta}^2 + R^2\,\dot{\theta}^2 + 2R^2\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}$.

Essendo poi $I_{G_z} = \dfrac{mR^2}{2}$, l'energia cinetica del disco è

$$T = \frac{1}{2}\,m\left(R^2\,\dot{\varphi}^2 + R^2\,\varphi^2\,\dot{\theta}^2 + R^2\,\dot{\theta}^2 + 2R^2\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{mR^2}{2}\,\left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\,m\,R^2\left[\frac{3}{2}\,\dot{\varphi}^2 + 3\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta} + \left(\frac{3}{2} + \varphi^2\right)\dot{\theta}^2\right]. \quad \square$$

Esercizio 8. Nel piano Oxy, si consideri (Figura 8) un disco omogeneo,

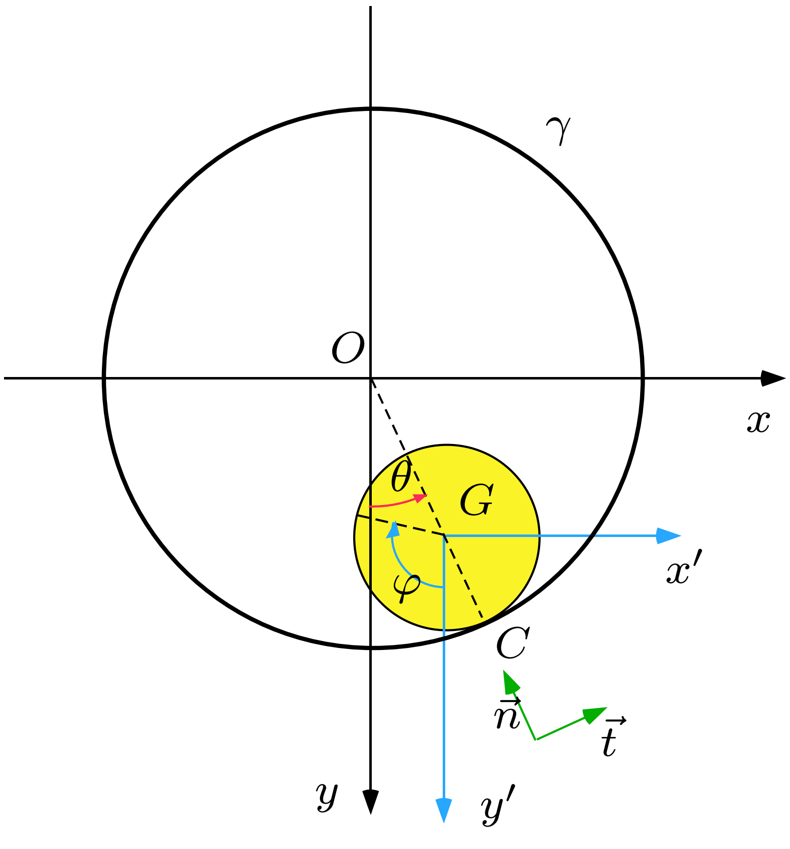

Figura 8:

di massa m e raggio R, che *rotola senza strisciare* all'interno di un profilo circolare γ fisso, di centro O e raggio R. Calcolare l'energia cinetica del disco.

Risoluzione. Il disco ha un solo grado di libertà. Indichiamo con $q := \theta = y^+\widehat{O}C \in [0, 2\pi)$.

▶ I metodo: Per applicazione del Teorema di König, l'energia cinetica del disco è

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\, m\, v_G^2 + T' = \frac{1}{2}\, m\, v_G^2 + \frac{1}{2}\, I_{G_z}\, \omega_{\mathcal{D}}^2}\,.$$

Calcolo di $\vec{\omega}_{\mathcal{D}}$: Si ha

$$\vec{v}_G = (R - r)\dot{\theta}\,\vec{t}\,. \tag{1}$$

Inoltre, dalla formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi, si ha

$$\vec{v}_G = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{\mathcal{D}} \times (G - C)\,.$$

Per l'ipotesi di rotolamento senza strisciamento $\vec{v}_C = \vec{0}$. Quindi

$$\vec{v}_G = \omega_{\mathcal{D}}\, \vec{k} \times r\, \vec{n} = \omega_{\mathcal{D}}\, r\, \vec{t}\,. \tag{2}$$

Uguagliando (1) con (2), si ha

$$(R-r)\dot{\theta} = \omega_{\mathcal{D}}\, r \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega_{\mathcal{D}} = \frac{R-r}{r}\,\dot{\theta}}\,.$$

Pertanto l'energia cinetica del disco è

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\, m\, (R-r)^2\, \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\, \frac{mr^2}{2}\, \left(\frac{R-r}{r}\,\dot{\theta}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4}\, m\, (R-r)^2 \dot{\theta}^2\,. \end{aligned}$$

▶ II metodo: Essendo C il centro di istantanea rotazione del disco, l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2}\, I_{Cz'}\, \omega_{\mathcal{D}}^2 = \frac{3}{4}\, m\, (R - r)^2 \dot{\theta}^2$$

dove $I_{Cz'} = \dfrac{3}{2}\, m r^2$.

N.B. Come parametro lagrangiano può essere scelto anche φ, angolo di rotazione propria del disco. In questo caso: $\vec{\omega}_{\mathcal{D}} = \dot{\varphi}\,\vec{k}$. L'energia cinetica del disco è data da

$$T = \frac{1}{2}\,I_{Cz'}\,\omega_{\mathcal{D}}^2 = \frac{3}{4}\,m\,r^2\,\dot{\varphi}^2\,.$$

Per l'ipotesi di rotolamento senza strisciamento

$$\vec{v}_G = \vec{\omega}_{\mathcal{D}} \times (G - C) = \dot{\varphi}\,\vec{k} \times r\,\vec{n} = r\,\dot{\varphi}\,\vec{t}\,.$$

Essendo poi $\vec{v}_G = (R - r)\dot{\theta}\,\vec{t}$, si ritrova $\dot{\varphi} = \dfrac{R - r}{r}\dot{\theta}$.