Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Dinamica dei sistemi materiali

Maria Grazia Naso

naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

Esercizio 1. In un piano verticale Oxy si consideri un disco pesante e omogeneo (Figura 1), di massa m e raggio R, incernierato in O. Sul punto A, diametralmente opposto ad O, è applicata la forza elastica $\vec{F}_A = -k(A - A')$, con $k = \dfrac{mg}{2R}$ ed A' proiezione di A sull'asse x. Supposti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

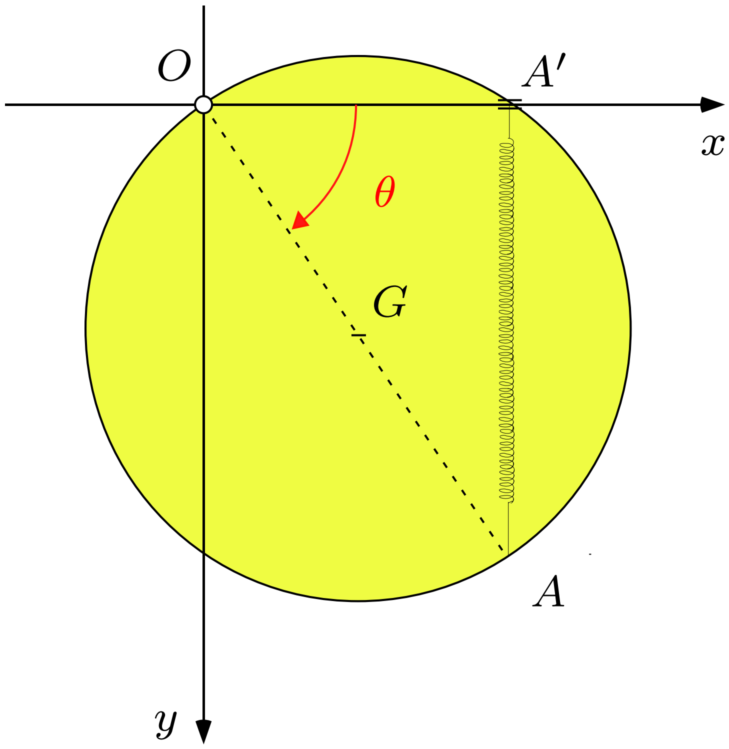


Figura 1:

(a) l'equazione differenziale del moto;

(b) la reazione vincolare dinamica in O;

(c) la reazione vincolare dinamica in O, nell'istante $t = 0$, nel caso in cui inizialmente $G \equiv (R, 0)$ con atto di moto nullo;

(d) le posizioni di equilibrio del disco;

(e) la reazione vincolare statica in O;

(f) l'integrale primo di moto per il sistema materiale.

Risoluzione. Il disco ha un solo grado di libertà. Sia $q := x^+\widehat{O}A = \theta \in [0, 2\pi)$. Per ipotesi inizialmente si ha $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$. Le forze attive agenti

$$\vec{p} = m\vec{g}\,, \quad \vec{F}_A = -k(A - A')\,,$$

sono conservative. Le coordinate dei punti significativi del disco sono

$$G \equiv (R\cos\theta\,,\ R\sin\theta), \quad A \equiv (2R\cos\theta\,,\ 2R\sin\theta)\,.$$

Inoltre si hanno

$$\begin{cases} \dot{x}_G = -R\sin\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_G = R\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \ddot{x}_G = -R\sin\theta\,\ddot{\theta} - R\cos\theta\,\dot{\theta}^2 \\ \ddot{y}_G = R\cos\theta\,\ddot{\theta} - R\sin\theta\,\dot{\theta}^2\,. \end{cases}$$

▶ Consideriamo la seconda equazione cardinale della dinamica (si assume il punto O come polo per il calcolo dei momenti)

$$\boxed{\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{\Omega}^e_O + \vec{\Psi}^e_O}\,. \tag{1}$$

Poiché $\vec{K}_O = \mathbf{I}_O\,\vec{\omega}$ e $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{k}$, si trova $\vec{K}_O = I_{Oz}\,\dot{\theta}\,\vec{k}$, dove (per applicazione del Teorema di Huygens) si ha

$$I_{Oz} = I_{Gz} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2\,.$$

Si osservi che $\vec{\Psi}^e_O = \vec{0}$. Da (1) si ottiene

$$\frac{3}{2}\,mR^2\ddot{\theta}\,\vec{k} = (G-O)\times m\vec{g} + (A-O)\times\vec{F}_A$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{2}\,mR^2\ddot{\theta} = mgR\,\cos\theta - 4kR^2\,\sin\theta\,\cos\theta\,. \tag{2}$$

Da (2) si ottiene

$$3\,mR^2\ddot\theta = 2\,mgR\,\cos\theta - 2\,mgR\,\sin 2\theta$$

e quindi l'*equazione differenziale del moto del disco* è

$$\boxed{\ddot\theta - \frac{2g}{3R}\,(\cos\theta - \sin 2\theta) = 0}\,. \tag{3}$$

▶ Per determinare la reazione vincolare dinamica in O si consideri la prima equazione cardinale della dinamica

$$\frac{d\vec Q}{dt} = \vec R^e + \vec\Phi^e\,,$$

o equivalentemente

$$\boxed{m\vec a_G = \vec R^e + \vec\Phi^e}\,.$$

In componenti si trova

$$\begin{cases} m\left(-R\,\sin\theta\,\ddot\theta - R\,\cos\theta\,\dot\theta^2\right) = \Phi_{Ox} \\ m\left(R\,\cos\theta\,\ddot\theta - R\,\sin\theta\,\dot\theta^2\right) = \Phi_{Oy} + mg - 2kR\,\sin\theta\,, \end{cases}$$

da cui si ricava la reazione vincolare dinamica $\boxed{\vec{\Phi}_O = \Phi_{Ox}\,\vec{\imath} + \Phi_{Oy}\,\vec{\jmath}}$, dove

$$\begin{cases} \Phi_{Ox} = m\left(-R\,\sin\theta\,\ddot{\theta} - R\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) \\ \Phi_{Oy} = m\left(R\,\cos\theta\,\ddot{\theta} - R\,\sin\theta\,\dot{\theta}^2\right) - mg + 2kR\,\sin\theta \end{cases}$$

▶ Inizialmente $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$. Per calcolare la reazione vincolare dinamica $\vec{\Phi}_O$ all'istante $t = 0$, si consideri

$$\begin{cases} \Phi_{Ox}|_{t=0} = m\left\{-R\,\sin\theta(0)\,\ddot{\theta}(0) - R\,\cos\theta(0)\,\left[\dot{\theta}(0)\right]^2\right\} \\ \Phi_{Oy}|_{t=0} = m\left\{R\,\cos\theta(0)\,\ddot{\theta}(0) - R\,\sin\theta(0)\,\left[\dot{\theta}(0)\right]^2\right\} - mg + 2kR\,\sin\theta(0) \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} \Phi_{Ox}|_{t=0} = 0 \\ \Phi_{Oy}|_{t=0} = mR\,\underbrace{\boxed{\ddot{\theta}(0)}}_{\text{da calcolare}} - mg\,. \end{cases}$$

Dall'equazione differenziale del moto (3) si ha

$$3\,R\,\ddot{\theta}(0) = 2\,g\,\cos\theta(0) - 2\,g\,\sin 2\theta(0) \;\Rightarrow\; \boxed{\ddot{\theta}(0) = \frac{2g}{3R}}\,.$$

Quindi $\boxed{\vec{\Phi}_O|_{t=0} = \left(0\,,\,-\frac{1}{3}\,mg\right)}$.

▶ Per determinare le posizioni di equilibrio del disco,

I metodo: Si applica la seconda equazione cardinale della statica (rispetto al polo O)

$$\boxed{\vec{\Omega}^e_O + \vec{\Psi}^e_O = \vec{0}} \;\Rightarrow\; (G-O)\times m\vec{g} + (A-O)\times\vec{F}_A = \vec{0}\,.$$

In componenti si ha

$$2\,mgR\,\cos\theta - 2\,mgR\,\sin 2\theta = 0 \;\Rightarrow\; \cos\theta(1 - 2\,\sin\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \cos\theta = 0\;\vee\sin\theta = \frac{1}{2}\,.$$

Si trovano dunque le seguenti posizioni di equilibrio

$$\boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad\vee\quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2} \quad\vee\quad \theta_3 = \frac{\pi}{6} \quad\vee\quad \theta_4 = \frac{5\pi}{6}.}$$

II metodo: Le forze attive agenti sono conservative. Il potenziale delle forze agenti sul disco è

$$\mathcal{U} = mg\, y_G - \frac{k}{2}\,\overline{AA'}^2 + c = mgR\,\sin\theta - 2kR^2\,\sin^2\theta + c\,. \tag{4}$$

Le posizioni di equilibrio si trovano imponendo la stazionarietà della funzione potenziale:

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\theta} = 0 \;\Rightarrow\; mgR\,\cos\theta - 4kR^2\,\sin\theta\,\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \cos\theta = 0\ \vee \sin\theta = \frac{1}{2}\,.$$

Si ottengono dunque le seguenti posizioni di equilibrio

$$\boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2} \quad \vee \quad \theta_3 = \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad \theta_4 = \frac{5\pi}{6}.} \tag{5}$$

▶ Per determinare la reazione vincolare statica $\vec{\Phi}_O$ utilizziamo la prima equazione cardinale della statica

$$\boxed{m\vec{g} - k(A - A') + \vec{\Phi}_O = \vec{0}}$$

che in componenti fornisce

$$\begin{cases} \Phi_{Ox} = 0 \\ \Phi_{Oy} = -mg + 2kR \underbrace{\boxed{\sin\theta_e}}_{\text{da calcolare}} . \end{cases}$$

Ricordando (5), si ha

$$\text{se} \quad \theta_e = \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Phi}_O = (0, 0)}$$
$$\text{se} \quad \theta_e = \theta_2 = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Phi}_O = (0, -2mg)}$$
$$\text{se} \quad \theta_e = \theta_3 = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Phi}_O = \left(0, -\frac{1}{2}\, mg\right)}$$
$$\text{se} \quad \theta_e = \theta_4 = \frac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Phi}_O = \left(0, -\frac{1}{2}\, mg\right)}.$$

▶ Poiché le forze attive agenti sono conservative con potenziale $\mathcal{U}$ ed i vincoli sono fissi e bilaterali, è valido il Teorema di Conservazione dell'Energia Meccanica

$$\boxed{T + V = E}$$

dove $V = -\mathcal{U}$ è l'*energia potenziale* del disco ed E è una costante che rappresenta l'energia totale del sistema e che possiamo calcolare mediante le condizioni iniziali. Il disco considerato è un corpo rigido con asse fisso (asse Oz); l'energia cinetica del disco è data da

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\, I_{Oz}\, \omega^2 = \frac{3}{4}\, mR^2\, \dot{\theta}^2}.$$

Ricordando (4) e le condizioni iniziali assegnate, l'integrale primo di moto per il sistema materiale è

$$\boxed{\frac{3}{4}\, mR^2\, \dot{\theta}^2 - mgR\, \sin\theta + 2kR^2\, \sin^2\theta = 0}. \quad \square$$

Esercizio 2. In un piano verticale Oxy si consideri un'asta AB, omogenea e pesante, (Figura 2), di massa m e lunghezza $2L$, avente l'estremo A vincolato ad una semicirconferenza $\overset{\frown}{CD}$ fissa (senza mai raggiungere i punti C e D), di centro O e raggio R ($R < L$), mentre un suo punto si appoggia in C. Supposti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

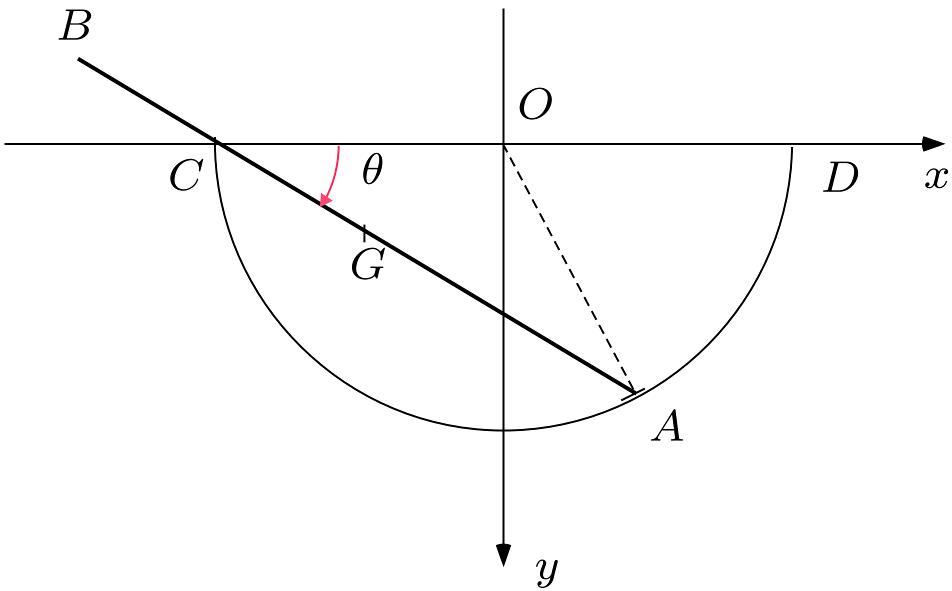


Figura 2:

(a) le reazioni vincolari dinamiche;

(b) l'equazione differenziale del moto;

(c) le posizioni di equilibrio dell'asta;

(d) le reazioni vincolari statiche.

Risoluzione. L'asta AB ha un grado di libertà. Sia $q := x^+\widehat{C}A = \theta$. Essendo $\overline{AC} = 2R\,\cos\theta$, si deve avere

$$0 < \overline{AC} \leq \overline{AB} \;\Rightarrow\; 0 < 2R\,\cos\theta \leq 2L \;\Rightarrow\; 0 < \cos\theta \leq \frac{L}{R}\,.$$

Poiché $L > R$, allora $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. La forza attiva agente

$$\vec{p} = m\vec{g}\,,$$

è conservativa. Le coordinate dei punti significativi dell'asta sono

$$G \equiv (-R + 2R\,\cos^2\theta - L\,\cos\theta\,,\; R\,\sin 2\theta - L\,\sin\theta)$$
$$A \equiv (2R\,\cos^2\theta - R\,,\; R\,\sin 2\theta)\,.$$

Inoltre si hanno

$$
\begin{cases}
\dot{x}_G = -2R\,\sin 2\theta\,\dot\theta + L\,\sin\theta\,\dot\theta \\
\dot{y}_G = 2R\,\cos 2\theta\,\dot\theta - L\,\cos\theta\,\dot\theta
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\ddot{x}_G = (L\,\sin\theta - 2R\,\sin 2\theta)\,\ddot\theta + (L\,\cos\theta - 4R\,\cos 2\theta)\,\dot\theta^2 \\
\ddot{y}_G = (-L\,\cos\theta + 2R\,\cos 2\theta)\,\ddot\theta + (L\,\sin\theta - 4R\,\sin 2\theta)\,\dot\theta^2\,.
\end{cases}
$$

▶ Per determinare le reazioni vincolari dinamiche in A ed in C si consideri la prima equazione cardinale della dinamica

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e + \vec{\Phi}^e\,,$$

o equivalentemente

$$\boxed{m\vec{a}_G = \vec{R}^e + \vec{\Phi}^e}\,.$$

Poiché $\vec{\Phi}_C = \Phi_C\,\sin\theta\,\vec{\imath} - \Phi_C\,\cos\theta\,\vec{\jmath}$ e $\vec{\Phi}_A = -\Phi_A\,\cos 2\theta\,\vec{\imath} - \Phi_A\,\sin 2\theta\,\vec{\jmath}$, In componenti si trova

$$\begin{cases} m\,(L\,\sin\theta - 2R\,\sin 2\theta)\,\ddot{\theta} + m\,(L\,\cos\theta - 4R\,\cos 2\theta)\,\dot{\theta}^2 = \Phi_C\,\sin\theta - \Phi_A\,\cos 2\theta \\ m\,(-L\,\cos\theta + 2R\,\cos 2\theta)\,\ddot{\theta} + m\,(L\,\sin\theta - 4R\,\sin 2\theta)\,\dot{\theta}^2 = \\ \qquad\qquad = -\Phi_C\,\cos\theta - \Phi_A\,\sin 2\theta + mg\,, \end{cases}$$

e quindi, per $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, si ottengono

$$\begin{cases} \Phi_C = \dfrac{-m\left(-L\,\sin^2\theta\,\ddot{\theta} + L\ddot{\theta} - 2\,R\,\cos\theta\,\ddot{\theta} + L\,\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + g\,\cos\theta - 2\,g\,\sin^2\theta\,\cos\theta\right)}{\sin^2\theta - 1} \\ \Phi_A = \dfrac{m\left(4\,R\,\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 - 4\,R\,\dot{\theta}^2 - 2\,R\,\sin\theta\,\cos\theta\,\ddot{\theta} + L\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - g\,\cos\theta\,\sin\theta\right)}{\sin^2\theta - 1} \end{cases} \tag{6}$$

▶ Dalla seconda equazione cardinale della dinamica (si assume il baricentro G dell'asta AB come polo per il calcolo dei momenti)

$$\boxed{\frac{d\vec{K}_G}{dt} = \vec{\Omega}^e_G + \vec{\Psi}^e_G}\,. \tag{7}$$

Si trova

$$\vec{K}_G = I_{33}^G\,\dot{\theta}\,\vec{k} = \frac{m(2L)^2}{12}\,\dot{\theta}\,\vec{k} = \frac{mL^2}{3}\,\dot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\vec{\Omega}_G^e = \vec{0}$$

$$\vec{\Psi}_G^e = (C-G)\times\vec{\Phi}_C + (A-G)\times\vec{\Phi}_A\,,$$

dove

$$(C-G)\times\vec{\Phi}_C = \Phi_C(2R\,\cos\theta - L)\vec{k}$$

$$(A-G)\times\vec{\Phi}_A = -L\,\Phi_A\,\sin\theta\,\vec{k}\,.$$

Ricordando (6), l'equazione differenziale del moto è

$$\cos^2\theta\left[2mR(2R-L\,\cos\theta) - \frac{2mL^2}{3} + 2mLR\,\cos\theta\right]\ddot{\theta} - 2mRL\,\sin\theta\,\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 =$$
$$= 4mgR\,\sin^2\theta\,\cos^2\theta - mgL\,\sin^2\theta\,\cos\theta - mg\,\cos\theta(2R\,\cos\theta - L)$$

La forza attiva agente (la forza peso dell'asta) è conservativa. Il potenziale della forza peso agente sul disco è $\mathcal{U} = mg\, y_G + c = mg(R\,\sin 2\theta - L\,\sin\theta) + c$. Le posizioni di equilibrio si trovano imponendo la stazionarietà della funzione potenziale:

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\theta} = 0 \;\Rightarrow\; 2mgR\,\cos 2\theta - mgL\,\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; 4R\,\cos^2\theta - L\,\cos\theta - 2R = 0$$

$$\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{L \pm \sqrt{L^2 + 32R^2}}{8R}\,.$$

Poiché $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ed essendo $\cos\theta = \frac{L-\sqrt{L^2+32R^2}}{8R} < 0$, risolviamo solamente $\cos\theta = \frac{L+\sqrt{L^2+32R^2}}{8R}$. Affinché tale equazione goniometrica ammetta soluzione deve essere

$$\begin{cases} \frac{L+\sqrt{L^2+32R^2}}{8R} < 1 \\ \overline{CA} < \overline{BA} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} L < 2R \\ L > \sqrt{\frac{2}{3}}\,R \end{cases} \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{2}{3}}\,R < L < 2R\,.$$

Essendo poi per ipotesi $L > R$, si trova una sola configurazione di equilibrio, nel caso in cui $R < L < 2R$: $\theta = \bar{\theta} =: \arccos\frac{L+\sqrt{L^2+32R^2}}{8R}$.

Inoltre si ha

$$\left.\frac{d^2\mathcal{U}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\bar\theta} = -4mgR\,\sin 2\bar\theta + mgL\,\sin\bar\theta = mg\sin\bar\theta\left(L - 8R\,\frac{L+\sqrt{L^2+32R^2}}{8R}\right)$$
$$= -mg\,\sin\bar\theta\,\sqrt{L^2+32R^2} < 0\,.$$

Quindi $\theta = \bar\theta$ individua una posizione di equilibrio stabile.
N.B. La posizione di equilibrio dell'asta AB può essere calcolata anche dalle equazioni cardinali della statica

$$\vec{R}^e + \vec{\Phi}^e = \vec{0}\,, \quad \vec{\Omega}^e_G + \vec{\Psi}^e_G = \vec{0}\,,$$

da cui si ricavano anche le reazioni vincolari statiche

$$\Phi_A = mg\,\tan\bar\theta\,, \quad \Phi_C = mg\,\frac{\cos 2\bar\theta}{\cos\bar\theta}\,. \quad \square$$

Esercizio 3. In un piano verticale Oxy è mobile un'asta AB, omogenea e pesante, di massa m e lunghezza $2L$, avente l'estremo A scorrevole senza attrito sull'asse x. Si chiede di determinare:

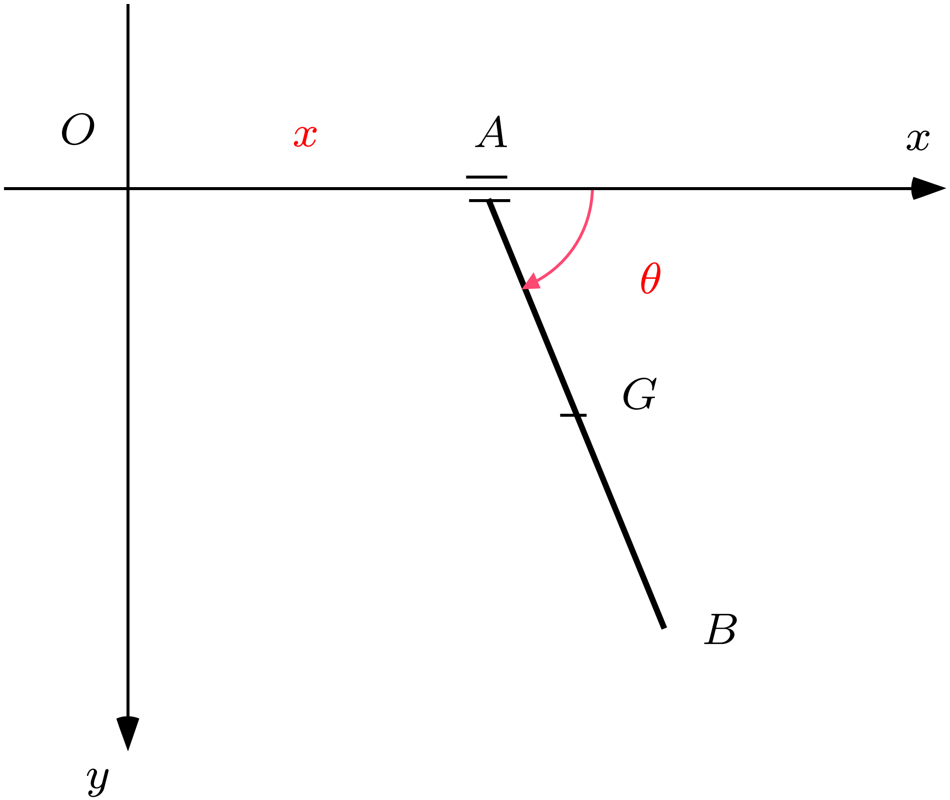


Figura 3:

(a) le equazioni differenziali del moto;

(b) la reazione vincolare dinamica, nell'istante $t = 0$ in cui $A \equiv O$, $B \equiv (2L, 0)$ e l'atto di moto è nullo;

(c) gli integrali primi di moto;

(d) le posizioni di equilibrio dell'asta;

(e) le reazioni vincolari all'equilibrio.

Risoluzione. L'asta AB ha due gradi di libertà. Siano $q_1 := x_A = x \in \mathbb{R}$, $q_2 := x^+ \widehat{A}B = \theta \in [0, 2\pi)$. Per ipotesi, le condizioni iniziali sono date da

$$x(0) = 0\,, \quad \theta(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,, \quad \dot{\theta}(0) = 0\,.$$

Le coordinate dei punti significativi dell'asta sono

$$\begin{aligned} G &\equiv (x + L\,\cos\theta\,,\; L\,\sin\theta) \\ A &\equiv (x\,,\; 0)\,. \end{aligned}$$

Inoltre si hanno

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} - L\,\sin\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_G = L\,\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \ddot{x}_G = \ddot{x} - L\,\sin\theta\,\ddot{\theta} - L\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2 \\ \ddot{y}_G = L\,\cos\theta\,\ddot{\theta} - L\,\sin\theta\,\dot{\theta}^2\,. \end{cases}$$

La prima equazione cardinale della dinamica

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e + \vec{\Phi}^e \, ,$$

o equivalentemente

$$\boxed{m\vec{a}_G = \vec{R}^e + \vec{\Phi}^e} \, .$$

In componenti si trova

$$\begin{cases} m\,\ddot{x}_G = 0 \\ m\,\ddot{y}_G = mg - \Phi_A \, . \end{cases} \tag{8}$$

Da $(8)_1$, si ottiene una delle due equazioni differenziali del moto richieste:

$$\boxed{\ddot{x} - L\,\sin\theta\,\ddot{\theta} - L\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = 0} \, .$$

Inoltre, da $(8)_1$ e dalle condizioni iniziali fissate, si ricava uno dei due integrali primi di moto richiesti:

$$\dot{x}_G = \dot{x}_G(0) \;\Rightarrow\; \dot{x}_G = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{x} - L\,\sin\theta\,\dot{\theta} = 0} \, .$$

Da $(8)_2$, si trova la reazione vincolare dinamica in A:

$$\Phi_A = mg - m\,\ddot{y}_G \;\Rightarrow\; \Phi_A = mg - m\left(L\,\cos\theta\,\ddot{\theta} - L\,\sin\theta\,\dot{\theta}^2\right)\,. \qquad (9)$$

Nell'istante $t = 0$, la reazione vincolare dinamica in A è

$$\begin{aligned}\Phi_A\big|_{t=0} &= mg - m\left[L\,\cos\theta(0)\,\ddot{\theta}(0) - L\,\sin\theta(0)\,\dot{\theta}^2(0)\right]\\ &= mg - m\,L\,\underbrace{\boxed{\ddot{\theta}(0)}}_{\text{da calcolare}}\,.\end{aligned}$$

▶ Dalla seconda equazione cardinale della dinamica (si assume il baricentro G dell'asta AB come polo per il calcolo dei momenti)

$$\boxed{\frac{d\vec{K}_G}{dt} = \vec{\Omega}^e_G + \vec{\Psi}^e_G}\,. \qquad (10)$$

Poiché

$$
\begin{aligned}
&\vec{K}_G = I_{33}^G \, \dot{\theta} \, \vec{k} = \frac{m(2L)^2}{12} \, \dot{\theta} \, \vec{k} = \frac{mL^2}{3} \, \dot{\theta} \, \vec{k} \\
&\vec{\Omega}_G^e = \vec{0} \\
&\vec{\Psi}_G^e = (A - G) \times \vec{\Phi}_A = L \, \Phi_A \, \cos\theta \, \vec{k} \, ,
\end{aligned}
$$

si trova

$$
\frac{mL^2}{3} \, \ddot{\theta} = L \, \Phi_A \, \cos\theta \, ,
$$

e sostituendovi l'espressione ricavata in (9) si ottiene

$$
\frac{mL^2}{3} \, \ddot{\theta} = L \, \left[mg - m \left(L \, \cos\theta \, \ddot{\theta} - L \, \sin\theta \, \dot{\theta}^2 \right) \right] \, \cos\theta \, .
$$

La seconda equazione differenziale del moto richiesta è quindi

$$
\left(\frac{1}{3} + \cos^2\theta \right) \, \ddot{\theta} - \sin\theta \, \cos\theta \, \dot{\theta}^2 - \frac{g}{L} \cos\theta = 0 \, . \tag{11}
$$

Nel caso in cui $t = 0$ diventa $\ddot{\theta}(0) = \dfrac{3g}{4L}$. La reazione vincolare dinamica in A, nel caso in cui $t = 0$, è

$$\boxed{\Phi_A\big|_{t=0} =} mg - m\,L\,\frac{3g}{4L} = \boxed{\frac{1}{4}\,mg}.$$

▶ Poiché le forze attive agenti sono conservative con potenziale $\mathcal{U}$ ed i vincoli sono fissi e bilaterali, è valido il Teorema di Conservazione dell'Energia Meccanica

$$\boxed{T + V = E}$$

dove $V = -\mathcal{U}$ è l'*energia potenziale* del disco ed E è una costante che rappresenta l'energia totale del sistema e che possiamo calcolare mediante le condizioni iniziali.

L'energia cinetica dell'asta AB è data da (Teorema di König per l'energia cinetica)

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\, m\, v_G^2 + T' = \frac{1}{2}\, m\, v_G^2 + \frac{1}{2}\, I_{33}^G\, \omega^2 = \frac{1}{2}\, m \left(\dot{x}^2 - 2L\, \sin\theta\, \dot{x}\, \dot{\theta} + \frac{4}{3}\, L^2\, \dot{\theta}^2 \right)}\,.$$

Le forze attive agenti sono conservative. Il potenziale delle forze agenti sul disco è

$$\mathcal{U} = mg\, y_G + c = mgL\, \sin\theta + c\,. \tag{12}$$

Ricordando le condizioni iniziali assegnate, un altro integrale primo di moto per l'asta AB è

$$\boxed{\frac{1}{2}\, m \left(\dot{x}^2 - 2L\, \sin\theta\, \dot{x}\, \dot{\theta} + \frac{4}{3}\, L^2\, \dot{\theta}^2 \right) - mgL\, \sin\theta = 0}\,.$$

▶ Per determinare le eventuali posizioni di equilibrio dell'asta AB possiamo applicare i seguenti due metodi.

I metodo: Dalle equazioni cardinali della statica

$$\begin{cases} \vec{R}^e + \vec{\Phi}^e = \vec{0} \\ \vec{\Omega}^e_G + \vec{\Psi}^e_G = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\Phi_A = mg} \quad \text{reazione vincolare statica in } A \\ L\,\Phi_A \cos\theta = 0 \ \Rightarrow \ \theta = \frac{\pi}{2} \ \vee \ \theta = \frac{3\pi}{2} \,. \end{cases}$$

Quindi le posizioni di equilibrio dell'asta AB sono individuate da

$$\boxed{\left(x_e\,,\,\frac{\pi}{2}\right) \ \vee \ \left(x_e\,,\,\frac{3\pi}{2}\right)\,, \quad x_e \in \mathbb{R}}$$

II metodo: Le forze attive agenti sono conservative. Il potenziale delle forze agenti sull'asta è

$$\mathcal{U} = mg\,y_G + c = mgL\,\sin\theta + c\,.$$

Le posizioni di equilibrio si trovano imponendo la stazionarietà della funzione potenziale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ mgL\,\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Si ottengono dunque le seguenti posizioni di equilibrio

$$\boxed{\left(x_e\,,\,\frac{\pi}{2}\right)\;\vee\;\left(x_e\,,\,\frac{3\pi}{2}\right)\,,\quad x_e\in\mathbb{R}}\qquad\square$$

Esercizio 4. In un piano verticale Oxy è mobile una lamina quadrata $ABCD$, omogenea e pesante, di massa m e diagonale $\overline{AC} = 2L$. Un suo vertice A è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse x. All'estremo B è applicata la forza elastica $\vec{F}_B = -k(B - B')$,con $k = \dfrac{mg}{L}$ e B' proiezione ortogonale di B sull'asse x. Si chiede di determinare:

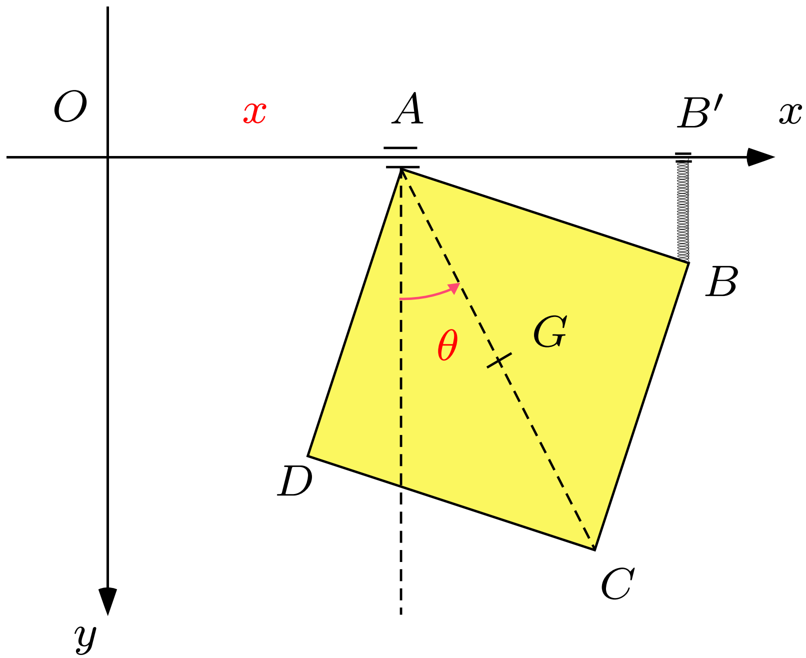


Figura 4:

(a) le equazioni differenziali del moto;

(b) gli integrali primi di moto per il sistema materiale;

(c) la reazione vincolare dinamica in A;

(d) la reazione vincolare dinamica in A, nell'istante $t = 0$, nel caso in cui inizialmente $A \equiv O$, $C \equiv (2L, 0)$, con atto di moto nullo;

(e) le posizioni di equilibrio della lamina;

(f) la reazione vincolare statica in A.

Risoluzione. La lamina $ABCD$ ha due gradi di libertà. Siano $q_1 := x_A = x \in \mathbb{R}$, $q_2 := y^+ \widehat{A}C = \theta \in [0, 2\pi)$. Per ipotesi, le condizioni iniziali sono date da

$$x(0) = 0\,, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{2}\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,, \quad \dot{\theta}(0) = 0\,.$$

Si osservi che $AB = \sqrt{2}\,L$. Le coordinate dei punti significativi della lamina sono

$$\begin{aligned}
G &\equiv (x + L\,\sin\theta\,,\; L\,\cos\theta) \\
A &\equiv (x\,,\; 0) \\
B &\equiv \left(x + \sqrt{2}\,L\,\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\,,\; \sqrt{2}\,L\,\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right) \\
&\equiv (x + L\,(\cos\theta + \sin\theta)\,,\; L\,(\cos\theta - \sin\theta))\,.
\end{aligned}$$

Inoltre si hanno

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} + L\,\cos\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_G = -L\,\sin\theta\,\dot{\theta} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \ddot{x}_G = \ddot{x} + L\,\cos\theta\,\ddot{\theta} - L\,\sin\theta\,\dot{\theta}^2 \\ \ddot{y}_G = -L\,\sin\theta\,\ddot{\theta} - L\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2\,. \end{cases}$$

▶ Consideriamo le equazioni cardinali della dinamica

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e + \vec{\Phi}^e \\ \dfrac{d\vec{K}_G}{dt} = \vec{\Omega}^e_G + \vec{\Psi}^e_G \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} m\vec{a}_G = m\,\vec{g} - k(B - B') + \vec{\Phi}_A \\ I_{Gz}\,\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = -k(B - B') \times (G - B) + \vec{\Phi}_A \times (G - A)\,. \end{cases} \tag{13}$$

La $(13)_1$ in componenti diventa

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G = 0 \\ m\ddot{y}_G = mg - k\,y_B - \Phi_A\,. \end{cases} \tag{14}$$

Da $(14)_1$ si ricava una delle due equazioni differenziali del moto della lamina:

$$\boxed{\ddot{x} + L\,\cos\theta\,\ddot{\theta} - L\,\sin\theta\,\dot{\theta}^2 = 0}\,.$$

Da $(14)_2$ si ottiene l'espressione della reazione vincolare dinamica in A:

$$\Phi_A = mL\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) + mg - kL\,(\cos\theta - \sin\theta)\;. \tag{15}$$

Inoltre, da $(14)_1$ e dalle condizioni iniziali fissate, si ricava uno dei due integrali primi di moto richiesti:

$$\dot{x}_G = \dot{x}_G(0) \;\Rightarrow\; \dot{x}_G = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{x} + L\,\cos\theta\,\dot{\theta} = 0}\,.$$

Poiché

$$
\begin{aligned}
I_{Gz} &= \frac{m(\sqrt{2}\,L)^2}{6} = \frac{mL^2}{3} \\
\vec{\omega} &= -\,\dot{\theta}\,\vec{k} \\
\vec{\Omega}^e_G &= -\,k\,y_B(x_B - x_G)\vec{k} = -kL^2(\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta\,\vec{k} \\
\vec{\Psi}^e_G &= -\,\Phi_A(x_A - x_G)\vec{k} = L\,\sin\theta\,\Phi_A\,\vec{k}\,,
\end{aligned}
$$

da $(14)_2$ si ottiene l'altra equazione differenziale del moto del sistema materiale:

$$
\begin{aligned}
-\,\frac{mL^2}{3}\,\ddot{\theta} = -kL^2(\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta \\
+\,L\,\sin\theta\left[mL\,\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) + mg - kL\,\left(\cos\theta - \sin\theta\right)\right]\,,
\end{aligned}
$$

o equivalentemente

$$
\boxed{mL^2\left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right)\ddot{\theta} + mL^2\,\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = kL^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - mgL\,\sin\theta}\,, \quad (16)
$$

▶ Poiché le forze attive agenti sono conservative con potenziale $\mathcal{U}$ ed i vincoli sono fissi e bilaterali, è valido il Teorema di Conservazione dell'Energia Meccanica

$$\boxed{T + V = E}$$

dove $V = -\mathcal{U}$ è l'*energia potenziale* del disco ed E è una costante che rappresenta l'energia totale del sistema e che possiamo calcolare mediante le condizioni iniziali. L'energia cinetica della lamina è data da (Teorema di König per l'energia cinetica)

$$\boxed{T} = \frac{1}{2}\, m\, v_G^2 + \frac{1}{2}\, I_{Gz}\, \omega^2 = \frac{1}{2}\, m \left(\dot{x}^2 + 2L\, \cos\theta\, \dot{x}\, \dot{\theta} + L^2\, \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}\, \frac{mL^2}{3}\, \dot{\theta}^2$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}\, m \left(\dot{x}^2 + 2L\, \cos\theta\, \dot{x}\, \dot{\theta} + \frac{4L^2}{3}\, \dot{\theta}^2 \right)}.$$

Il potenziale delle forze agenti sulla lamina è

$$\mathcal{U} = mg\, y_G - \frac{k}{2} |B - B'|^2 + c = mgL\, \cos\theta - \frac{k}{2}\, L^2 (\cos\theta - \sin\theta)^2 + c\,. \qquad (17)$$

Ricordando le condizioni iniziali assegnate, un altro integrale primo di moto per il sistema materiale è

$$\boxed{\frac{1}{2}\,m\left(\dot{x}^2 + 2L\,\cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta} + \frac{4L^2}{3}\,\dot{\theta}^2\right) - mgL\,\cos\theta + \frac{k}{2}\,L^2(\cos\theta - \sin\theta)^2 = \frac{k}{2}\,L^2}\,.$$

▶ Da (15) e dalle condizioni iniziali assegnate, si ottiene la reazione vincolare dinamica in A nel caso in cui $t = 0$:

$$\begin{aligned}\Phi_A\big|_{t=0} &= mL\,\left[\sin\theta(0)\,\ddot{\theta}(0) + \cos\theta(0)\,\dot{\theta}^2(0)\right] + mg - kL\,[\cos\theta(0) - \sin\theta(0)]\\ &= mL\,\underbrace{\boxed{\ddot{\theta}(0)}}_{\text{da calcolare}} + mg + kL\,.\end{aligned}$$

Da (16), nel caso in cui $t = 0$, si ha

$$\frac{4}{3}\,mL^2\,\ddot{\theta}(0) = -kL^2 - mgL \;\Rightarrow\; \ddot{\theta}(0) = -\frac{3}{4}\,\frac{mg + kL}{mL}\,, \tag{18}$$

e quindi $\boxed{\Phi_A\big|_{t=0} = -\frac{3}{4}\,mL\,\frac{mg+kL}{mL} + mg + kL = \frac{1}{4}(mg + kL)}$.

▶ Per determinare le posizioni di equilibrio della lamina possiamo applicare i seguenti due metodi.

▶ I metodo: Dalle equazioni cardinali della statica

$$\begin{cases} \vec{R}^e + \vec{\Phi}^e = \vec{0} \\ \vec{\Omega}^e_G + \vec{\Psi}^e_G = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\Phi_A = mg - kL(\cos\theta - \sin\theta)} \\ kL^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - mgL\,\sin\theta = 0\,. \end{cases}$$

Poiché $k = \dfrac{mg}{L}$, si ha

$$\frac{mg}{L}\,L^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - mgL\,\sin\theta = 0 \;\Rightarrow\; 2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$$

$$\Rightarrow\; \sin\theta = \frac{1}{2} \;\vee\; \sin\theta = -1$$

da cui si ottengono le seguenti posizioni di equilibrio per l'asta:

$$\boxed{\left(x_e\,,\,\frac{\pi}{6}\right) \;\vee\; \left(x_e\,,\,\frac{5\pi}{6}\right) \;\vee\; \left(x_e\,,\,\frac{3\pi}{2}\right)\,, \quad x_e \in \mathbb{R}}\,.$$

In corrispondenza a ciascuna configurazione di equilibrio si trova l'espressione della reazione vincolare statica in A:

$$\begin{aligned}
&\text{se } \left(x_e\,,\ \tfrac{\pi}{6}\right) &&\Rightarrow &&\Phi_A = \tfrac{3-\sqrt{3}}{2}\,mg\\
&\text{se } \left(x_e\,,\ \tfrac{5\pi}{6}\right) &&\Rightarrow &&\Phi_A = \tfrac{3+\sqrt{3}}{2}\,mg\\
&\text{se } \left(x_e\,,\ \tfrac{3\pi}{2}\right) &&\Rightarrow &&\Phi_A = 0
\end{aligned}$$

▶ II metodo: Le forze attive agenti sono conservative. Da (17), il potenziale delle forze agenti sulla lamina è

$$\mathcal{U} = mg\,y_G - \frac{k}{2}|B - B'|^2 + c = mgL\,\cos\theta - \frac{k}{2}\,L^2(\cos\theta - \sin\theta)^2 + c\,.$$

Le posizioni di equilibrio si trovano imponendo la stazionarietà della funzione potenziale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -mgL\,\sin\theta - k\,L^2(\cos\theta - \sin\theta)(-\sin\theta - \cos\theta) = 0\,. \end{cases} \qquad \square$$

Esercizio 5. In un piano verticale Oxy si consideri un'asta AB, omogenea e pesante, di massa m e lunghezza $2L$, avente gli estremi A e B, rispettivamente, scorrevoli senza attrito sull'asse x e sull'asse y. Si chiede di determinare:

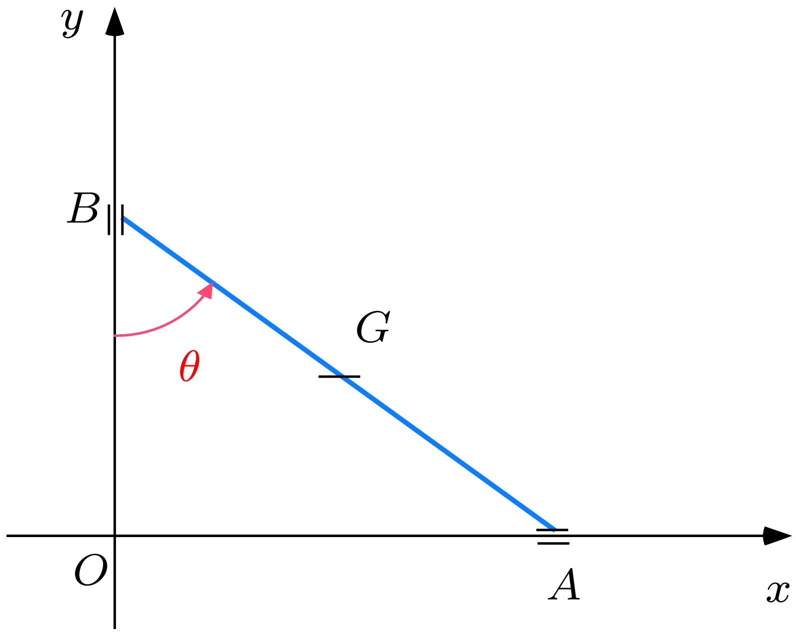


Figura 5:

(a) l'equazione differenziale del moto;

(b) le reazioni vincolari dinamiche in A ed in B;

(c) le posizioni di equilibrio dell'asta;

(d) le reazioni vincolari all'equilibrio in A e in B.

Risoluzione. L'asta AB ha un grado di libertà. Sia $q := y^- \widehat{B} A = \theta \in (-\pi, \pi]$. La forza attiva agente

$$\vec{p} = m\vec{g} \,,$$

è conservativa. Le coordinate dei punti significativi dell'asta sono

$$\begin{aligned} G &\equiv (L\,\sin\theta\,,\,L\,\cos\theta) \\ A &\equiv (2L\,\sin\theta\,,\,0) \\ B &\equiv (0\,,\,2L\,\cos\theta)\,. \end{aligned}$$

Inoltre si hanno

$$\begin{cases} \dot{x}_G = L\,\cos\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_G = -L\,\sin\theta\,\dot{\theta} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \ddot{x}_G = L\,\cos\theta\,\ddot{\theta} - L\,\sin\theta\,\dot{\theta}^2 \\ \ddot{y}_G = -L\,\sin\theta\,\ddot{\theta} - L\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2\,. \end{cases}$$

▶ Per determinare le reazioni vincolari dinamiche in A ed in B si consideri la prima equazione cardinale della dinamica

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e + \vec{\Phi}^e \,,$$

o equivalentemente

$$\boxed{m\vec{a}_G = \vec{R}^e + \vec{\Phi}^e} \,.$$

In componenti si trova

$$\begin{cases} m\left(L\,\cos\theta\,\ddot{\theta} - L\,\sin\theta\,\dot{\theta}^2\right) = \Phi_B \\ m\left(-L\,\sin\theta\,\ddot{\theta} - L\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = \Phi_A - mg\,, \end{cases}$$

da cui le reazioni vincolari dinamiche in A ed in B sono espresse da

$$\begin{cases} \Phi_B = m\left(L\,\cos\theta\,\ddot{\theta} - L\,\sin\theta\,\dot{\theta}^2\right) \\ \Phi_A = mg + m\left(-L\,\sin\theta\,\ddot{\theta} - L\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\,. \end{cases} \tag{19}$$

▶ Dalla seconda equazione cardinale della dinamica (si assume il baricentro G dell'asta AB come polo per il calcolo dei momenti)

$$\boxed{\frac{d\vec{K}_G}{dt} = \vec{\Omega}^e_G + \vec{\Psi}^e_G}\,. \tag{20}$$

Si trova

$$\vec{K}_G = I^G_{33}\,\dot{\theta}\,\vec{k} = \frac{m(2L)^2}{12}\,\dot{\theta}\,\vec{k} = \frac{mL^2}{3}\,\dot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\vec{\Omega}^e_G = \vec{0}$$

$$\vec{\Psi}^e_G = (A-G)\times\vec{\Phi}_A + (B-G)\times\vec{\Phi}_B = \Phi_A\,L\,\sin\theta - \Phi_B\,L\,\cos\theta\,.$$

Ricordando (19), l'equazione differenziale del moto è

$$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{3g}{4L}\sin\theta = 0}\,.$$

▶ Per determinare le posizioni di equilibrio dell'asta,

I metodo: Si applicano le equazioni cardinali della statica (la seconda è calcolata rispetto al polo A) $\vec{R}^e + \vec{\Phi}^e = \vec{0}$, $\vec{\Omega}^e_A + \vec{\Psi}^e_A = \vec{0}$. In componenti si ha

$$\begin{cases} \Phi_B = 0 \\ \Phi_A = mg \\ -\Phi_B\, 2L\, \cos\theta + mgL\, \sin\theta = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\theta = 0 \;\vee\; \theta = \pi} \end{cases}$$

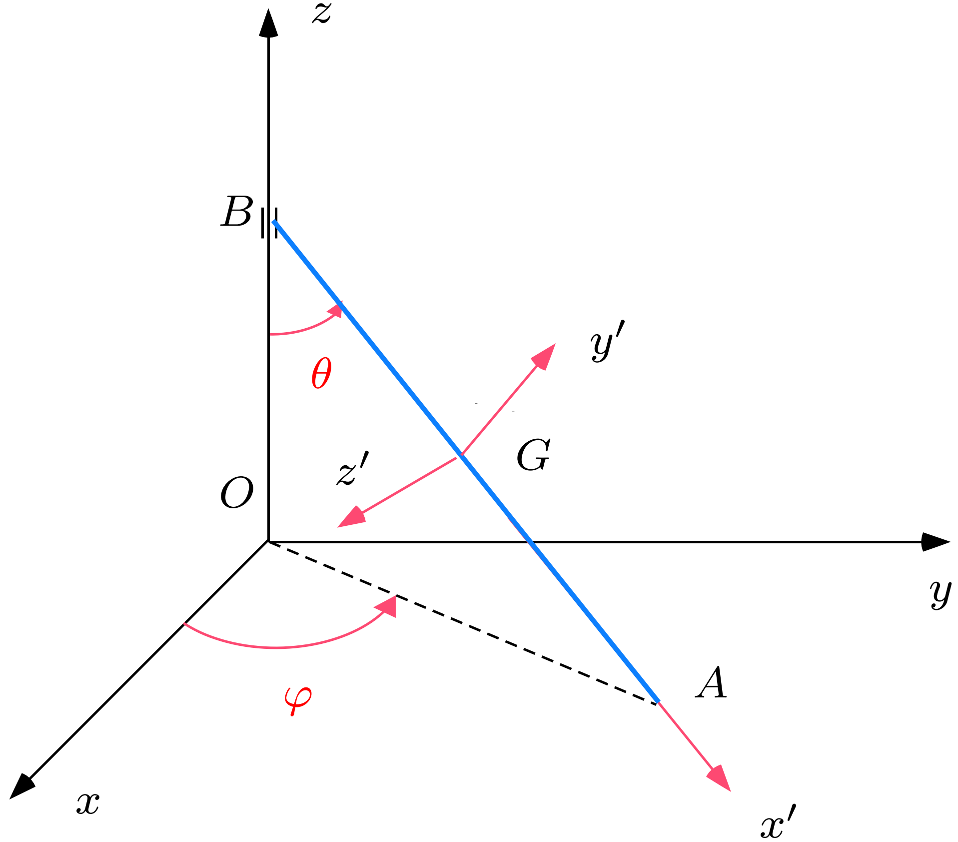
II metodo: Le forze attive agenti sono conservative. Il potenziale delle forze agenti sull'asta è

$$\mathcal{U} = -mg\, y_G + c = -mgL\, \cos\theta + c\,.$$

Le posizioni di equilibrio si trovano imponendo la stazionarietà della funzione potenziale:

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\theta} = 0 \;\Rightarrow\; mgL\, \sin\theta = 0\,. \quad \square$$

Esercizio 6. Nel riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, si consideri un'asta AB, omogenea e pesante, di massa m e lunghezza $2L$, avente gli estremi A e B, rispettivamente, scorrevoli senza attrito sul piano Oxy e sull'asse z. Si supponga che inizialmente $A \equiv (2L, 0, 0)$, $B \equiv O$ e l'atto di moto sia nullo. Si chiede di determinare gli eventuali integrali primi del moto.



Risoluzione. L'asta AB ha due gradi di libertà. Siano $q_1 := z^-\widehat{B}A = \theta \in [0, \pi]$ e $q_2 := x^+\widehat{O}A = \varphi \in [0, 2\pi)$. La forza attiva $\vec{p} = m\vec{g}$, agente sull'asta, è conservativa. Le coordinate del baricentro G dell'asta sono

$$G \equiv (L\,\sin\theta\,\cos\varphi\,,\;L\,\sin\theta\,\sin\varphi\,,\;L\,\cos\theta)$$

Inoltre si hanno

$$\begin{cases} \dot{x}_G = L\,\cos\theta\,\cos\varphi\,\dot{\theta} - L\,\sin\theta\,\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{y}_G = L\,\cos\theta\,\sin\varphi\,\dot{\theta} + L\,\sin\theta\,\cos\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{z}_G = -L\,\sin\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

e

$$v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 + \dot{z}_G^2 = L^2\,\dot{\theta}^2 + L^2\,\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\,.$$

Le condizioni iniziali sono date da

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}\,,\quad \varphi(0) = 0\,,\quad \dot{\theta}(0) = 0\,,\quad \dot{\varphi}(0) = 0\,.$$

▶ Poiché le forze attive agenti sono conservative con potenziale $\mathcal{U}$ ed i vincoli sono fissi e bilaterali, è valido il Teorema di Conservazione dell'Energia Meccanica

$$\boxed{T + V = E}$$

dove $V = -\mathcal{U}$ è l'*energia potenziale* del disco ed E è una costante che rappresenta l'energia totale del sistema e che possiamo calcolare mediante le condizioni iniziali. L'energia cinetica dell'asta AB è data da (Teorema di König per l'energia cinetica)

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\, m\, v_G^2 + T' = \frac{1}{2}\, m\, v_G^2 + \frac{1}{2}\mathbf{I}_G\, \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}\,.$$

Calcolo di $\mathbf{I}_G\, \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}$:
Si consideri un riferimento baricentrale $Gx'y'z'$ solidale con l'asta AB (Figura 5). Rispetto agli assi di tale riferimento

$$\mathbf{I}_G = \frac{m(2L)^2}{12}\,\mathrm{diag}[0, 1, 1] = \frac{mL^2}{3}\,\mathrm{diag}[0, 1, 1]\,.$$

Rispetto al riferimento $Oxyz$, la velocità angolare dell'asta AB è determinata dalla somma di due velocità angolari: una dovuta alla rotazione attorno all'asse Oz ($\vec{\omega}_1 = \dot{\varphi}\,\vec{k}$), l'altra attorno all'asse Gz' perpendicolare all'asta AB ed al piano rotante OBA ($\vec{\omega}_2 = \dot{\theta}\,\vec{k}'$, $\vec{k}'$ versore dell'asse Gz'). Quindi si ha

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\boxed{\vec{k}} + \dot{\theta}\,\vec{k}' = \dot{\varphi}\,\boxed{\left(-\cos\theta\,\vec{\imath}\,' + \sin\theta\,\vec{\jmath}\,'\right)} + \dot{\theta}\,\vec{k}'$$

da cui

$$\mathbf{I}_G\,\vec{\omega} = \frac{mL^2}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\cos\theta\,\dot{\varphi} \\ \sin\theta\,\dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{mL^2}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta\,\dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{I}_G\,\vec{\omega}\cdot\vec{\omega} = \frac{mL^2}{3}\left(\ 0, \quad \sin\theta\,\dot{\varphi}, \quad \dot{\theta}\ \right)\cdot\left(\ -\cos\theta\,\dot{\varphi}, \quad \sin\theta\,\dot{\varphi}, \quad \dot{\theta}\ \right)$$

$$= \frac{mL^2}{3}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right).$$

L'energia cinetica dell'asta AB è

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\,mL^2\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right)}\,.$$

Il potenziale della forza peso (la sola forza attiva agente sull'asta) è

$$\mathcal{U} = -mg\,z_G + c = -mgL\,\cos\theta + c\,.$$

Pertanto un integrale primo del moto è

$$\boxed{\frac{2}{3}\,mL^2\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right) + mgL\,\cos\theta = 0}\,.$$

▶ Per determinare un altro integrale primo del moto, si osservi che, dalla seconda equazione cardinale della dinamica (calcolata rispetto al polo O):

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = m\vec{g} \times (O - G) + \vec{\Phi}_A \times (O - A) + \vec{\Phi}_B \times (O - B)\,,$$

essendo $m\vec{g} \parallel \vec{z}$, $\vec{\Phi}_A \parallel \vec{z}$, $(O - B) \parallel \vec{z}$, si ottiene

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} \cdot \vec{k} = m\vec{g} \times (O - G) \cdot \vec{k} + \vec{\Phi}_A \times (O - A) \cdot \vec{k} + \vec{\Phi}_B \times (O - B) \cdot \vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{K}_O}{dt} \cdot \vec{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{K}_O \cdot \vec{k} = c}\,,$$

dove c è una costante che dipende dalle condizioni iniziali. Applicando il Teorema di König per il momento della quantità di moto, si ha

$$\vec{K}_O = \vec{K}_G + m\,\vec{v}_G \times (O - G)\,,$$

dove

$$
m\,\vec{v}_G \times (O-G) = (G-O)\times m\,\vec{v}_G = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_G & y_G & z_G \\ m\,\dot{x}_G & m\,\dot{y}_G & m\,\dot{z}_G \end{vmatrix}.
$$

In particolare, si deve calcolare

$$
\begin{aligned}
m\,\vec{v}_G \times (O-G)\cdot\vec{k} &= m\,(x_G\,\dot{y}_G - \dot{x}_G\,y_G) \\
&= m\Big[L\,\sin\theta\,\cos\varphi\left(L\,\cos\theta\,\sin\varphi\,\dot{\theta} + L\,\sin\theta\,\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right) + \\
&\quad -\left(L\,\cos\theta\,\cos\varphi\,\dot{\theta} - L\,\sin\theta\,\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right)L\,\sin\theta\,\sin\varphi\Big] \\
&= mL^2\,\sin^2\theta\,\dot{\varphi}\,.
\end{aligned}
$$

Inoltre si ha

$$
\vec{K}_G = \mathbf{I}_G\,\vec{\omega} = \frac{mL^2}{3}\left(\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{\jmath}\,' + \dot{\theta}\,\vec{k}'\right)\,.
$$

Essendo

$$
\begin{aligned}
\vec{\imath}\,' &= \sin\theta\,\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \cos\theta\,\vec{k} \\
\vec{\jmath}\,' &= \cos\theta\,\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \sin\theta\,\vec{k} \\
\vec{k}\,' &= \sin\varphi\,\vec{\imath} - \cos\varphi\,\vec{\jmath}
\end{aligned}
$$

si ottiene

$$\vec{K}_G \cdot \vec{k} = \frac{mL^2}{3}\,\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

e quindi

$$\vec{K}_O \cdot \vec{k} = c \;\Rightarrow\; \frac{mL^2}{3}\,\sin^2\theta\,\dot{\varphi} + mL^2\,\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = c \;\Rightarrow\; \frac{4mL^2}{3}\,\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = 0\,.$$

Un altro integrale primo del moto è

$$\boxed{\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = 0}\,.$$