Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Svincolamento statico

Maria Grazia Naso

`naso@ing.unibs.it`

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

Esercizio 1. In un piano verticale Oxy si consideri un sistema materiale costituito da una lamina quadrata $ABCD$, omogenea e pesante, di massa m e lato l, e da un'asta, omogenea e pesante, OE, di massa M e lunghezza L, con $l < L < 3l$. L'asta OE è vincolata mediante una cerniera in O, ed è appoggiata alla lamina quadrata nel vertice A. La lamina $ABCD$ ha i vertici B e C vincolati a scorrere lungo l'asse x. Nel punto medio N lato AB agisce la forza elastica $\vec{F}_N = -k(N - N')$, dove N' è la proiezione di N sull'asse y e $k = \alpha \dfrac{MgL}{2l^2}$, $\alpha > 0$. Sia $x^+\widehat{O}E = \theta$ con $\theta \in \left(\arcsin \dfrac{l}{L}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Supposti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

(a) le posizioni di equilibrio del sistema al variare del parametro α;

(b) le reazioni vincolari interne ed esterne al sistema all'equilibrio nel caso in cui $\alpha = \dfrac{1}{8}$.

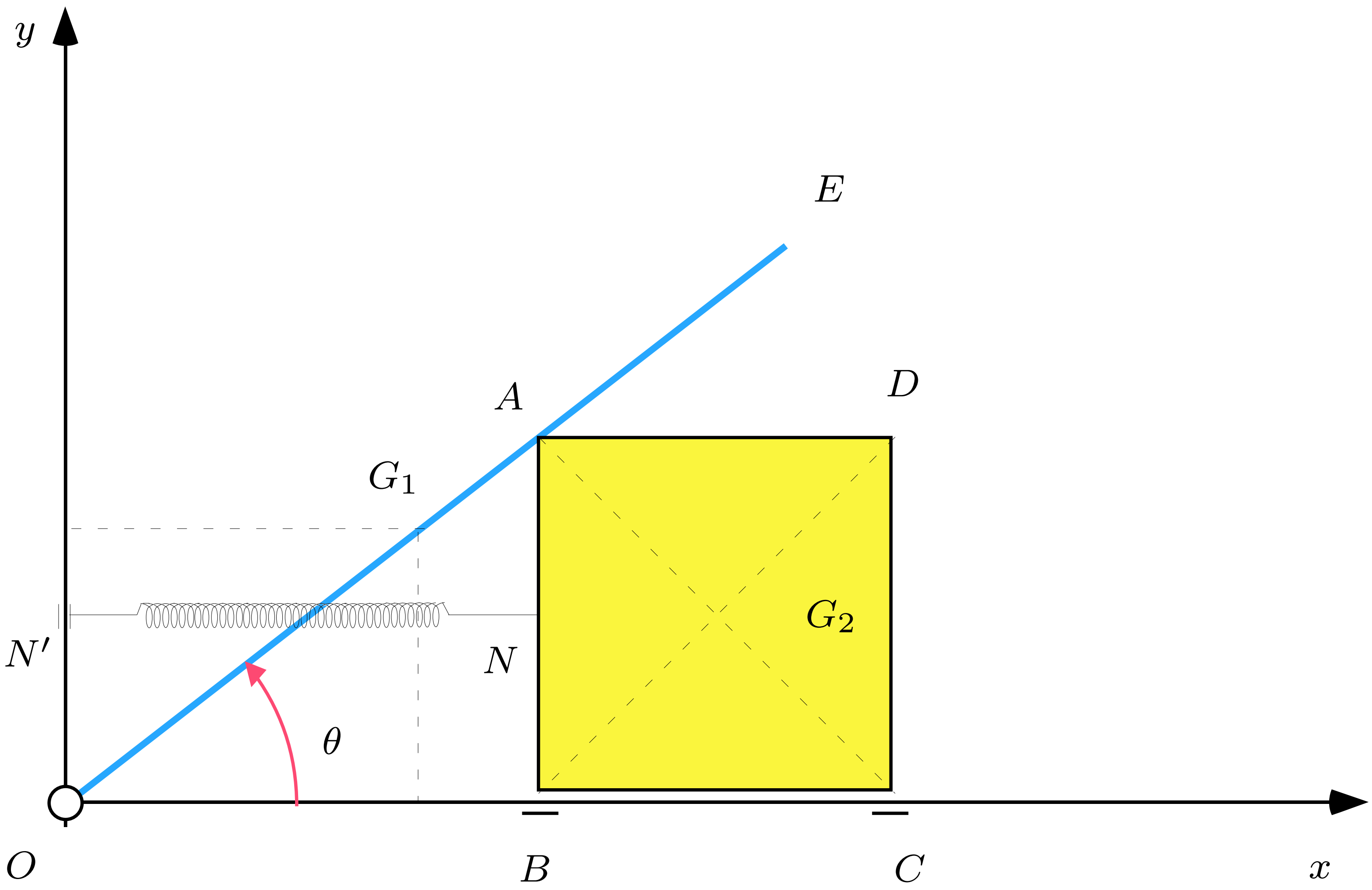

Figura 1:

Risoluzione.

Il sistema materiale ha un solo grado di libertà. Sia $q := x^+ \widehat{O} E = \theta \in \left(\arcsin \frac{l}{L}, \frac{\pi}{2} \right)$.

Le forze attive agenti

$$\vec{p}_1 = M \vec{g} \,, \quad \vec{p}_2 = m \vec{g} \,, \quad \vec{F}_N = -k(N - N') \,,$$

sono conservative. Le coordinate dei punti significativi del sistema sono

$$G_1 \equiv \left(\frac{L}{2} \cos\theta \,,\, \frac{L}{2} \sin\theta \,,\, 0 \right)$$

$$G_2 \equiv \left(l \cot\theta + \frac{l}{2} \,,\, \frac{l}{2} \,,\, 0 \right)$$

$$A \equiv (l \cot\theta \,,\, l \,,\, 0)$$

$$B \equiv (l \cot\theta \,,\, 0 \,,\, 0)$$

$$N \equiv \left(l \cot\theta \,,\, \frac{l}{2} \,,\, 0 \right)$$

$$C \equiv (l \cot\theta + l \,,\, 0 \,,\, 0) \ .$$

Poiché le forze attive agenti sono conservative, il potenziale delle forze agenti sul sistema materiale è

$$\mathcal{U} = -Mg\,y_{G_1} - mg\,y_{G_2} - \frac{k}{2}\,\overline{NN'}^2 + c = -Mg\,\frac{L}{2}\,\sin\theta - mg\,\frac{l}{2} - \frac{k}{2}\,l^2\,\cot^2\theta + c\,. \quad (1)$$

Le posizioni di equilibrio si trovano imponendo la stazionarietà della funzione potenziale:

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\theta} = 0 \;\Rightarrow\; -Mg\,\frac{L}{2}\,\cos\theta + k\,l^2\,\cot\theta\,\frac{1}{\sin^2\theta} = 0 \;\Rightarrow\; \cos\theta = 0 \;\vee \sin^3\theta = \frac{2k\,l^2}{MgL} = \alpha\,.$$

Ricordando che $\theta \in \left(\arcsin\frac{l}{L}, \frac{\pi}{2}\right)$, si ottiene dunque la seguente posizione di equilibrio

$$\boxed{\text{se } \alpha \in \left(\frac{l^3}{L^3}\,,\,1\right)\,: \quad \theta = \arcsin\sqrt[3]{\alpha}\,.} \qquad (2)$$

Nel caso in cui $\alpha = \frac{1}{8}$ la posizione di equilibrio è data da $\theta = \frac{\pi}{6}$.

▶ Per il calcolo della reazione vincolare $\vec{\Phi}_A$ interna al sistema materiale, consideriamo separatamente l'asta e la lamina e, per ciascun corpo rigido, sostituiamo i vincoli dovuti alla presenza dell'altro corpo rigido con la relativa reazione vincolare.
Essendo senza attrito il contatto tra la lamina e l'asta, $\vec{\Phi}_A$ ha direzione ortogonale all'asta e quindi:

$$\vec{\Phi}_A = \Phi_A(\sin\theta\,\vec{\imath} - \cos\theta\,\vec{\jmath})\,.$$

Applichiamo singolarmente all'asta OA le equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} \vec{R}^e + \vec{\Phi}^e = \vec{0} \\ \\ \vec{\Omega}^e_O + \vec{\Psi}^e_O = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\vec{g} - \vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_O = \vec{0} \\ \\ (G_1 - O) \times M\vec{g} + (A - O) \times (-\vec{\Phi}_A) = \vec{0}\,. \end{cases}$$

In componenti forniscono

$$\begin{cases} \Phi_{Ox} = \Phi_A \, \sin\theta_e \\ \Phi_{Oy} = Mg - \Phi_A \, \cos\theta_e \\ \Phi_A = \dfrac{MgL}{2l} \, \sin\theta_e \, \cos\theta_e \, . \end{cases} \tag{3}$$

Ricordando poi che, nel caso in cui $\alpha = \dfrac{1}{8}$, la posizione di equilibrio è data da $\theta_e = \dfrac{\pi}{6}$, si trova

$$\begin{cases} \Phi_{Ox} = \dfrac{1}{2}\,\Phi_A = \dfrac{\sqrt{3}\,MgL}{16l} \\ \Phi_{Oy} = Mg - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\Phi_A = \dfrac{Mg}{16l}(16l - 3L) \\ \Phi_A = \dfrac{\sqrt{3}\,MgL}{8l} \, . \end{cases}$$

▶ Per determinare le reazioni vincolari esterne $\vec{\Phi}_B$ e $\vec{\Phi}_C$ all'equilibrio, si considerano le equazioni cardinali della statica applicate alla lamina (si scelga il punto B come polo per la seconda equazione):

$$\begin{cases} \vec{R}^e + \vec{\Phi}^e = \vec{0} \\ \vec{\Omega}^e_B + \vec{\Psi}^e_B = \vec{0} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} m\vec{g} - k(N - N') + \vec{\Phi}_B + \vec{\Phi}_C + \vec{\Phi}_A = \vec{0} \\ (G_2 - B) \times m\vec{g} + (N - B) \times [-k(N - N')] + (C - B) \times \vec{\Phi}_C + (A - B) \times \vec{\Phi}_A = \vec{0} \end{cases}$$

che in componenti forniscono

$$\begin{cases} \Phi_A \sin\theta_e - kl \cot\theta_e = 0 \\ -mg + \Phi_B + \Phi_C - \Phi_A \cos\theta_e = 0 \\ -mg\,\dfrac{l}{2} + \Phi_C\, l - \Phi_A\, l \sin\theta_e + \dfrac{kl^2}{2} \cot\theta_e = 0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Sostituendo $(3)_3$ in $(4)_{2-3}$, otteniamo

$$\begin{cases} \Phi_B = \dfrac{mg}{2} + \dfrac{MgL}{2l} \sin\theta_e \cos\theta_e (\cos\theta_e - \sin\theta_e) + \dfrac{kl}{2} \cot\theta_e \\ \qquad = \dfrac{mg}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\, MgL}{16l} \left(\sqrt{3} + \dfrac{1}{2}\right) \\ \Phi_C = \dfrac{mg}{2} + \dfrac{MgL}{2l} \sin^2\theta_e \cos\theta_e - \dfrac{kl}{2} cot\theta_e = \dfrac{mg}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\, MgL}{32l} \, . \end{cases}$$

▶ N.B. Mediante le equazioni cardinali della statica, sostituendo $(3)_3$ in $(4)_1$, si ritrova la posizione di equilibrio (2), determinata in precedenza con il metodo di stazionarietà del potenziale. □

Esercizio 2. Nel piano verticale Oxy si consideri il sistema materiale costituito da un disco omogeneo e pesante, di raggio R e massa m, che rotola senza strisciare sull'asse x e da un'asta omogenea e pesante AB, di massa m e lunghezza $4\,R$, il cui estremo A è incernierato senza attrito nel centro del disco. Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono due molle ideali: la prima, di costante elastica $k_1 = \dfrac{mg}{3R}$, richiama l'estremo A dell'asta in O mentre la seconda, di costante elastica $k_2 = \dfrac{mg}{R}$, richiama B in O. Si chiede:

1. determinare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;
2. calcolare le reazioni vincolari interne ed esterne in una posizione di equilibrio stabile;
3. calcolare l'energia cinetica del sistema.

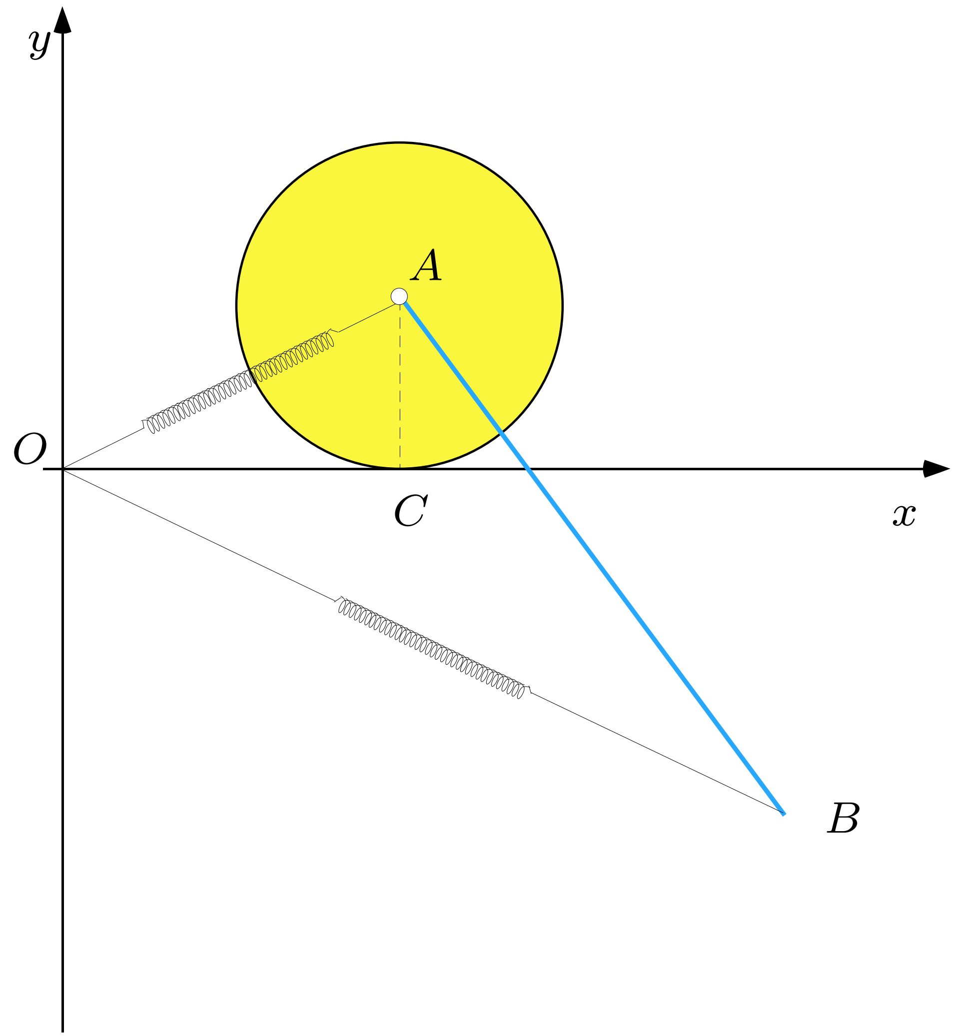

Figura 2:

Risoluzione. Sistema materiale olonomo, a vincoli lisci e fissi, soggetto a forze conservative, con due gradi di libertà. Siano

$$q_1 = x_C = x \in \mathbb{R}$$

$$q_2 = C\widehat{A}B = \varphi \in (-\pi, \pi]\,.$$

La funzione potenziale relativa alle forze applicate al sistema è

$$\mathcal{U} = -mg\, y_G - \frac{1}{2}\, k_1 |A - O|^2 - \frac{1}{2} k_2 |B - O|^2 + c$$

dove

$$\begin{aligned}
|A - O|^2 &= x^2 + R^2 \\
|B - O|^2 &= (x + 4R\, \sin\varphi)^2 + (4R\, \cos\varphi - R)^2 \\
y_G &= R - 2R\, \cos\varphi\,.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\mathcal{U} = -\frac{2}{3R} mgx^2 - 2mg(2x\,\sin\varphi - 2R\,\cos\varphi) + 2mgR\,\cos\varphi + c$$

Per determinare i punti di stazionarietà del potenziale, si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} = 0\,. \end{cases}$$

Si determinano, riferite alla coppia ordinata $(x\,,\,\varphi)$, le seguenti configurazioni di equilibrio ordinarie

$$\boxed{\begin{array}{cc} (0\,,\,0), & (0\,,\,\pi), \\ \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}R\,,\,\dfrac{\pi}{3}\right), & \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}R\,,\,-\dfrac{\pi}{3}\right)\,. \end{array}}$$

▶ Per lo studio della stabilità, essendo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} &= -\frac{4}{3R}\, mg < 0 \\
\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x\, \partial \varphi} &= -4mg\, \cos\varphi \\
\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} &= 4mg[x \sin\varphi - R\cos\varphi] - 2mgR\, \cos\varphi
\end{aligned}
$$

e ricordando

$$
\mathcal{H}(x\,,\,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x\, \partial \vartheta} \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi\, \partial x} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} \end{vmatrix}
$$

risulta

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}\,(0\,,\,0) < 0 &\quad\Rightarrow\quad \text{instabile}\\
\mathcal{H}\,(0\,,\,\pi) < 0 &\quad\Rightarrow\quad \text{instabile}\,.
\end{aligned}
$$

Inoltre si trova

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}R\,,\,\frac{\pi}{3}\right) > 0 &\quad\Rightarrow\quad \text{stabile}\\
\mathcal{H}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}R\,,\,-\frac{\pi}{3}\right) > 0 &\quad\Rightarrow\quad \text{stabile}
\end{aligned}
$$

▶ Per determinare le reazioni vincolari interne ed esterne all'equilibrio, si applichi la prima equazione cardinale della statica all'asta AB in una delle configurazioni di equilibrio stabile trovate

$$\vec{\Phi}_A + m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

dove

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= -\frac{mg}{3R}(x\vec{\imath} + R\vec{\jmath}) \\ \vec{F}_2 &= -\frac{mg}{R}[(x + 4R\sin\varphi)\vec{\imath} + (R - 4R\cos\varphi)\vec{\jmath}] \,. \end{aligned}$$

Risulta quindi

$$\begin{cases} \Phi_{Ax} = 0 \\ \Phi_{Ay} = \dfrac{mg}{3} \,. \end{cases}$$

Svincolando invece il disco, la prima equazione cardinale della statica fornisce la reazione vincolare esterna $\vec{\Phi}_C$

$$-\vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_C + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_{Cx} = 0 \\ \Phi_{Cy} = \dfrac{4mg}{3}\,. \end{cases}$$

Quindi $\vec{\Phi}_A = \dfrac{1}{3}mg\,\vec{\jmath}$ e $\vec{\Phi}_C = \dfrac{4}{3}mg\,\vec{\jmath}$.

L'energia cinetica del sistema è

$$T = T_{AB} + T_{\text{disco}} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\,I_{Gz}^{AB}\omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}\,I_{Cz}^{\text{disco}}\omega_{\text{disco}}^2$$

▶ dove

$$
\begin{aligned}
v_G^2 &= \dot{x}^2 + 4R\dot{x}\dot{\varphi}\,\cos\varphi + 4R^2\dot{\varphi}^2 \\
I_{Gz}^{AB} &= \frac{m}{12}(4R)^2 = \frac{m}{3}4R^2 \\
\omega_{AB}^2 &= \dot{\varphi}^2 \\
I_{Cz}^{\text{disco}} &= \frac{3mR^2}{2} \\
\omega_{\text{disco}}^2 &= \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2
\end{aligned}
$$

Pertanto l'energia cinetica del sistema materiale è

$$T = \frac{5}{4}m\dot{x}^2 + 2mR\,\dot{x}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi + \frac{8}{3}mR^2\,\dot{\varphi}^2\,. \quad \square$$