Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Meccanica analitica

I parte

Maria Grazia Naso

naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

Esercizio 1. In un piano verticale Oxy si consideri un sistema materiale costituito da una lamina quadrata $OABC$, omogenea e pesante, di massa M e diagonale $2l$, e da un punto materiale P, di massa m, vincolato a scorrere senza attrito lungo la diagonale OB. La lamina $OABC$ è rotante attorno al suo vertice O. Oltre alla forza peso sul sistema agisce una molla, di costante elastica $k = \dfrac{3mg}{l}$ e lunghezza a riposo $l_0 = \dfrac{l}{2}$ che collega P all'origine O del riferimento. Supposti i vincoli lisci, si chiede di determinare:

(a) le posizioni di equilibrio ordinarie e di confine per il sistema;

(b) la reazione vincolare in O all'equilibrio;

(c) le equazioni differenziali del moto.

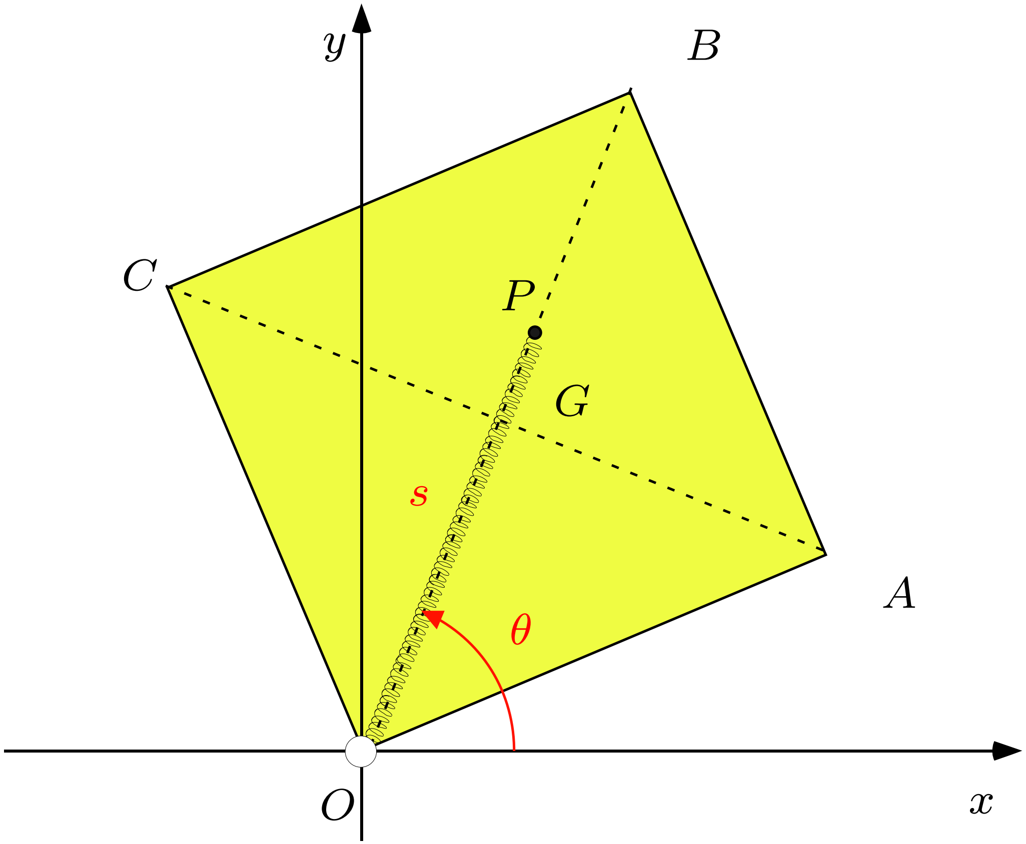

Figura 1:

Risoluzione.

Il sistema è olonomo con due gradi di libertà. Siano $q_1 := x^+\widehat{O}B = \theta \in [0, 2\pi)$ e $q_2 := (P - O) \cdot \dfrac{(B - O)}{2l} = s \in [0, 2l]$. Le forze attive agenti

$$\vec{p}_1 = m\vec{g}\,, \quad \vec{p}_2 = m\vec{g}\,, \quad \vec{F}_P = -k(s - l_0)\ \mathrm{vers}(P - O)\,,$$

sono conservative. Le coordinate dei punti significativi del sistema sono

$$G \equiv (l\ \cos\theta\,,\ l\ \sin\theta\,,\ 0)$$

$$P \equiv (s\ \cos\theta,\ s\ \sin\theta\,,\ 0)\ .$$

Le forze attive agenti sono conservative con potenziale

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= -\,M g\, y_G - m g\, y_P - \frac{k}{2}\,(s - l_0)^2 + c \\ &= -\,M g\, l\,\sin\theta - m g\, s\,\sin\theta - \frac{k}{2}\left(s - \frac{l}{2}\right)^2 + c\,. \end{aligned} \tag{1}$$

▶ Sia $s \in (0, 2l)$. Le posizioni di equilibrio ordinarie si trovano imponendo la stazionarietà della funzione potenziale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial s} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -M g\, l\,\cos\theta - m g\, s\,\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{(M l + m\, s)}_{>0}\cos\theta = 0 \\ \\ -m g\,\sin\theta - k\left(s - \dfrac{l}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ s = \dfrac{l}{6} \in (0, 2l) \end{cases} \vee \begin{cases} \theta = \dfrac{3\pi}{2} \\ s = \dfrac{5l}{6} \in (0, 2l)\,. \end{cases}$$

Si trovano quindi due posizioni di equilibrio ordinarie:

$$\boxed{\left(\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{l}{6}\right)\,,\quad \left(\frac{3\pi}{2}\,,\,\frac{5l}{6}\right)}\,.$$

- Ricerchiamo ora le eventuali posizioni di equilibrio di confine. A tale fine ricordiamo il **Principio dei Lavori Virtuali (sulle forze attive)**. Condizione necessaria e sufficiente, affinché una configurazione x_e sia di equilibrio per un sistema a vincoli fissi, è che il lavoro virtuale delle forze attive, calcolato in corrispondenza della configurazione x_e, con atto di moto nullo e per tutti i $t \geq 0$, sia minore o uguale a zero, cioè

$$\delta L^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_s(x_e, 0, t) \cdot \delta P_s \leq 0\,. \tag{2}$$

In particolare, quando gli spostamenti sono invertibili, in (2) deve valere il segno uguale.

Risulta quindi

$$
\begin{aligned}
\delta L^{(a)} &= M\vec{g}\cdot\delta G + m\vec{g}\cdot\delta P - k(s-l_0)\ \mathrm{vers}(P-O)\cdot\delta P \\
&= \underbrace{-g(Ml+m\,s)\cos\theta}_{=:Q_\theta}\ \delta\theta + \underbrace{\left[-mg\,\sin\theta - k\left(s-\frac{l}{2}\right)\right]}_{=:Q_s}\delta s\,.
\end{aligned}
$$

- se $s=0$, θ qualsiasi $\Rightarrow \delta s>0$, $\delta\theta$ arbitrario, quindi si ha

$$
\begin{cases} Q_\theta|_{s=0}=0 \\ Q_s|_{s=0}\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{mg}{2}\le 0 \quad \text{NON ACC.} \end{cases} \vee \begin{cases} \theta=\dfrac{3\pi}{2} \\ \dfrac{5mg}{2}\le 0 \quad \text{NON ACC.} \end{cases}
$$

- se $s=2l$, θ qualsiasi $\Rightarrow \delta s<0$, $\delta\theta$ arbitrario, quindi si ha

$$
\begin{cases} Q_\theta|_{s=2l}=0 \\ Q_s|_{s=2l}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta=\dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{11}{2}\,mg\ge 0 \quad \text{NON ACC.} \end{cases} \vee \begin{cases} \theta=\dfrac{3\pi}{2} \\ -\dfrac{7}{2}\,mg\ge 0 \quad \text{NON ACC.} \end{cases}
$$

Riassumendo, non si trova alcuna posizione di equilibrio di confine.

▶ Per il calcolo della reazione vincolare $\vec{\Phi}_O$ all'equilibrio, consideriamo la prima equazione cardinale della statica (N.B. in questo esercizio la forza elastica è una forza attiva esterna):

$$\vec{R}^e + \vec{\Phi}^e = \vec{0} \;\Rightarrow\; M\vec{g} + m\vec{g} - k\left(s - \frac{l}{2}\right)\mathrm{vers}(P-O) + \vec{\Phi}_O = \vec{0}\,.$$

In componenti si ha

$$\begin{cases} \Phi_{Ox} = k\left(s - \frac{l}{2}\right)\cos\theta_e \\ \Phi_{Oy} = (M+m)g + k\left(s - \frac{l}{2}\right)\sin\theta_e \end{cases}$$

Nelle configurazioni di equilibrio si trova

- se $(\theta\,,\,s) = \left(\dfrac{3\pi}{2}\,,\,\dfrac{5l}{6}\right)$: $\vec{\Phi}_O = (0, Mg)$;
- se $(\theta\,,\,s) = \left(\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{l}{6}\right)$: $\vec{\Phi}_O = (0, Mg)$.

N.B. Se il punto P fosse stato collegato tramite la molla al vertice O della lamina, la forza elastica sarebbe stata interna al sistema.

▶ Poiché il sistema delle forze attive è conservativo, introduciamo la lagrangiana : $\mathcal{L} = T + \mathcal{U}$, dove il potenziale $\mathcal{U}$ è già stato determinato in (1). L'energia cinetica del sistema è

$$T = T_P + T_{OABC} = \frac{1}{2}\, m\, v_P^2 + \frac{1}{2}\, I_{33}^O(OABC)\, \omega_{OABC}^2 .$$

Essendo $v_P^2 = \dot{s}^2 + s^2\,\dot{\theta}^2$ e $I_{33}^O(OABC) = \dfrac{m\,2\,\overline{OA}^2}{3} = \dfrac{4}{3}\, ml^2$, $\vec{\omega}_{OABC} = \dot{\theta}\,\vec{k}$, risulta

$$T = \frac{1}{2}\, m \left(\dot{s}^2 + s^2\,\dot{\theta}^2\right) + \frac{2}{3}\, ml^2\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\, m \left[\dot{s}^2 + \left(s^2 + \frac{4}{3}\, l^2\right)\dot{\theta}^2\right] .$$

La lagrangiana è quindi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, m \left[\dot{s}^2 + \left(s^2 + \frac{4}{3}\, l^2\right)\dot{\theta}^2\right] - Mg\, l\, \sin\theta - mg\, s\, \sin\theta - \frac{k}{2}\left(s - \frac{l}{2}\right)^2 .$$

Le equazioni di Lagrange per tale sistema conservativo sono date da

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot s} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0$$

e quindi le equazioni differenziali del moto del sistema sono

$$m\left(s^2 + \frac{4}{3}l^2\right)\ddot\theta + 2m\,s\,\dot\theta\,\dot s + Mgl\,\cos\theta + mg\,s\,\cos\theta = 0$$
$$m\,\ddot s - m\,s\,\dot\theta^2 + mg\,\sin\theta + k\left(s - \frac{l}{2}\right) = 0\,. \quad \square$$

Esercizio 2. In un piano verticale Oxy si consideri un sistema materiale costituito da un'asta AB, omogenea e pesante, di massa m e lunghezza $2l$, avente il baricentro incernierato nell'origine O del riferimento, e da un punto materiale P, di massa m, vincolato a scorrere sull'asta AB. Oltre alla forza peso, sul sistema agisce una molla ideale, di costante elastica $k = \dfrac{\lambda mg}{l}$, $\lambda > 0$, che collega il punto P con l'estremo B dell'asta. Supposti i vincoli lisci, si chiede di determinare

(a) le posizioni di equilibrio ordinarie e di confine per il sistema;

(b) le reazioni vincolari esterne ed interne all'equilibrio;

(c) le equazioni di Lagrange del moto del sistema.

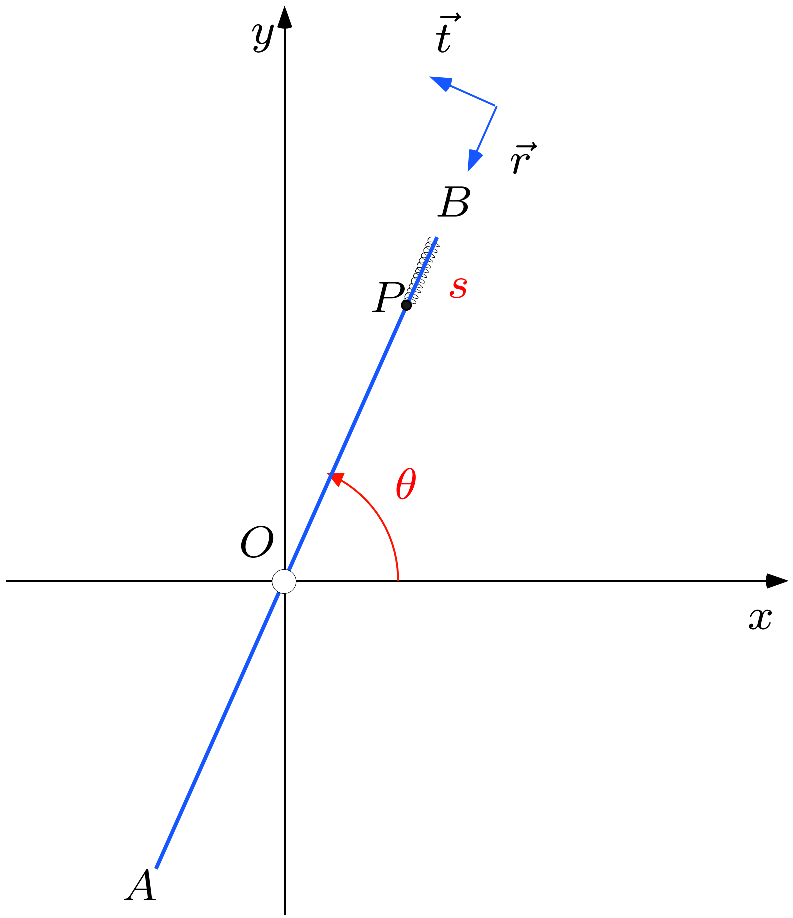

Figura 2:

Risoluzione.

Il sistema è olonomo con due gradi di libertà. Siano $q_1 := x^+\widehat{O}B = \theta \in [0, 2\pi)$ e $q_2 := (P - B) \cdot \dfrac{(A - B)}{2l} = s \in [0, 2l]$. Le forze attive agenti

$$\vec{p}_1 = m\vec{g}\,, \quad \vec{p}_2 = m\vec{g}\,, \quad \underbrace{\vec{F}_P = -k(P - B)\,, \quad \vec{F}_B = -\vec{F}_P}_{\text{forze attive interne al sistema}}\,,$$

sono conservative. Le coordinate dei punti significativi del sistema sono

$$B \equiv (l\ \cos\theta\,,\ l\ \sin\theta\,,\ 0)$$

$$P \equiv ((l - s)\ \cos\theta,\ (l - s)\ \sin\theta\,,\ 0)\ .$$

▶ Sia $s \in (0, 2l)$. Consideriamo i seguenti due metodi per determinare le configurazioni di equilibrio ordinarie.

I metodo: Poiché le forze attive agenti sono conservative, applichiamo il metodo di stazionarietà del potenziale. Il potenziale delle forze attive agenti è

$$\mathcal{U} = -mg\, y_P - \frac{k}{2}\, |P - B|^2 + c = -mg(l - s)\sin\theta - \frac{k}{2}\, s^2 + c\,. \tag{3}$$

Quindi si pone

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial s} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (l - s)\cos\theta = 0 \\ \sin\theta - \dfrac{\lambda}{l}\, s = 0\,, \end{cases}$$

e si trovano

$$\begin{cases} s = l \\ \theta = \arcsin\lambda \\ \text{se } 0 < \lambda \leq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} s = l \\ \theta = \pi - \arcsin\lambda \\ \text{se } 0 < \lambda \leq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ s = \dfrac{l}{\lambda} \\ \text{se } \lambda > \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} \theta = \dfrac{3\pi}{2} \\ s = -\dfrac{l}{\lambda} < 0 \\ \text{NON ACC.} \end{cases}$$

II metodo: Si ha

$$\delta L^{(a)} = m\vec{g}\cdot\delta O + m\vec{g}\cdot\delta P - k(P-B)\cdot\delta P - k(B-P)\cdot\delta B$$
$$- mg\,\delta y_P - k\,s\,\vec{r}\cdot\left[\delta s\,\vec{r} + (l-s)\,\delta\theta\,\vec{t}\right] + k\,s\,\vec{r}\cdot l\,\delta\theta\,\vec{t},$$

da cui si ottiene $\underbrace{-mg(l-s)\cos\theta}_{=:Q_\theta}\ \delta\theta + (\underbrace{mg\,\sin\theta - ks}_{=:Q_s})\delta s = 0$. Quindi si pone

$$\begin{cases} Q_\theta = 0 \\ Q_s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (l-s)\cos\theta = 0 \\ \sin\theta - \dfrac{\lambda}{l}\,s = 0\,, \end{cases}$$

e si trovano le stesse soluzioni calcolate con il precedente metodo.

N.B. Essendo le forze attive conservative, esiste un potenziale $\mathcal{U}(\theta, s)$ tale che le forze generalizzate $Q_i = \dfrac{\partial\mathcal{U}}{\partial q_i}$, dove $q_1 = \theta$ e $q_2 = s$.

▶ Le posizioni di confine si hanno per $s = 0$ e $s = 2l$ e θ qualsiasi. Per esaminare se siano di equilibrio, applichiamo il Principio dei Lavori Virtuali nella forma

$$\delta L^{(a)} = Q_\theta \, \delta\theta + Q_s \, \delta s \leq 0. \tag{4}$$

Consideriamo le configurazioni

$$s = 0, \ \theta \text{ qualsiasi} \quad \Rightarrow \ \delta s > 0, \ \delta\theta \text{ arbitrario.} \tag{5}$$

Affinché una delle configurazioni (5) sia di equilibrio di confine occorre e basta che sia

$$\delta L^{(a)} = Q_\theta(\theta, 0) \, \delta\theta + Q_s(\theta, 0) \, \delta s \leq 0$$

per tutti i $\delta\theta$, δs espressi dalle (5). Deve essere quindi

$$Q_\theta(\theta, 0) = 0 \,, \quad Q_s(\theta, 0) \leq 0 \,.$$

Risulta quindi

$$\begin{cases} -mgl\,\cos\theta = 0 \\ mg\,\sin\theta \le 0\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ mg \le 0\,, \\ \text{NON ACC.} \end{cases} \vee \begin{cases} \theta = \dfrac{3\pi}{2} \\ -mg \le 0\,, \\ \text{OK.} \end{cases}$$

Consideriamo le configurazioni

$$s = 2l,\ \theta \text{ qualsiasi} \quad \Rightarrow\ \delta s < 0,\ \delta\theta \text{ arbitrario.} \tag{6}$$

Affinché una delle configurazioni (6) sia di equilibrio di confine occorre e basta che sia

$$\delta L^{(a)} = Q_\theta(\theta, 2l)\,\delta\theta + Q_s(\theta, 2l)\,\delta s \le 0$$

per tutti i $\delta\theta$, δs espressi dalle (6). Deve essere quindi

$$Q_\theta(\theta, 2l) = 0\,, \quad Q_s(\theta, 2l) \ge 0\,.$$

Risulta quindi

$$\begin{cases} -mgl\,\cos\theta = 0 \\ mg\,\sin\theta - 2kl \geq 0\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ mg - 2kl \geq 0\,, \\ \text{se } 0 < \lambda \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} \theta = \dfrac{3\pi}{2} \\ -mg - 2kl \geq 0\,, \\ \text{NON ACC.} \end{cases}$$

Riassumendo, le posizioni di equilibrio di confine sono date da

- se $0 < \lambda \leq \dfrac{1}{2}$: $\left(\dfrac{3\pi}{2}\,,\,0\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}\,,\,2l\right)$.
- se $\lambda > \dfrac{1}{2}$: $\left(\dfrac{3\pi}{2}\,,\,0\right)$.

▶ Per determinare la reazione vincolare $\vec{\Phi}_O$ (esterna) all'equilibrio, consideriamo la prima equazione cardinale della statica applicata al sistema:

$$\vec{R}^e + \vec{\Phi}^e = \vec{0} \;\Rightarrow\; m\vec{g} + m\vec{g} + \vec{\Phi}_O = \vec{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \Phi_{Ox} = 0 \\ \Phi_{Oy} = 2mg \end{cases} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{\Phi}_O = 2mg\,\vec{\jmath}}.$$

▶ Per determinare la reazione vincolare $\vec{\Phi}_P$ (interna) all'equilibrio, consideriamo per il solo punto P:

$$m\vec{g} - k(P - B) + \vec{\Phi}_P = \vec{0} \quad \underset{\text{proiettando tale equazione lungo } \vec{t}}{\Rightarrow} \quad \Phi_P = mg\,\cos\theta_e\,.$$

- se $(\arcsin\lambda\,,\, l)$, con $0 < \lambda \leq 1$: $\vec{\Phi}_P = mg\,\sqrt{1-\lambda^2}\,\vec{t}$.
- se $(\pi - \arcsin\lambda\,,\, l)$, con $0 < \lambda \leq 1$: $\vec{\Phi}_P = -mg\,\sqrt{1-\lambda^2}\,\vec{t}$.
- se $\left(\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{l}{\lambda}\right)$, con $\lambda > \dfrac{1}{2}$: $\vec{\Phi}_P = \vec{0}$.
- se $\left(\dfrac{3\pi}{2}\,,\,0\right)$: $\vec{\Phi}_P = \vec{0}$.
- se $\left(\dfrac{\pi}{2}\,,\,2l\right)$, con $0 < \lambda \leq \dfrac{1}{2}$: $\vec{\Phi}_P = \vec{0}$.

▶ Poiché il sistema delle forze attive è conservativo, introduciamo la lagrangiana : $\mathcal{L} = T + \mathcal{U}$, dove il potenziale $\mathcal{U}$ è già stato determinato in (3). L'energia cinetica del sistema è

$$T = T_P + T_{AB} = \frac{1}{2}\, m\, v_P^2 + \frac{1}{2}\, I_{33}^O(AB)\, \omega_{AB}^2 \,.$$

Essendo $v_P^2 = \dot{s}^2 + (l-s)^2\, \dot{\theta}^2$ e $I_{33}^O(OABC) = \dfrac{m\, 4l^2}{12} = \dfrac{1}{3}\, ml^2$, $\vec{\omega}_{OABC} = \dot{\theta}\, \vec{k}$, risulta

$$T = \frac{1}{2}\, m \left(\dot{s}^2 + (l-s)^2\, \dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{6}\, ml^2\, \dot{\theta}^2 \,.$$

La lagrangiana è quindi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, m \left(\dot{s}^2 + (l-s)^2\, \dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{6}\, ml^2\, \dot{\theta}^2 - mg(l-s)\sin\theta - \frac{k}{2}\, s^2 \,.$$

Le equazioni di Lagrange per tale sistema conservativo sono date da

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot s} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = 0$$

e quindi le equazioni differenziali del moto del sistema sono

$$m\left[(l-s)^2 + \frac{1}{3}l^2\right]\ddot\theta - 2m(l-s)\dot\theta\,\dot s + mg(l-s)\cos\theta = 0$$
$$m\,\ddot s + m(l-s)\dot\theta^2 + mg\,\frac{\lambda}{l}\,s - mg\,\sin\theta = 0\,. \quad \Box$$