Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Meccanica analitica

II parte

Maria Grazia Naso

naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

Esercizio 1. Si consideri un sistema materiale pesante costituito da : un'asta omogenea AB, di massa $2m$ e lunghezza $2L$, un'asta OC, di massa trascurabile e lunghezza L, alla cui estremità C è saldato un punto materiale P di massa m. Tale sistema è vincolato ad appartenere ad un piano verticale π, mobile in un riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, attorno all'asse Oz. Gli estremi O ed A, rispettivamente dell'asta OC e dell'asta AB, sono incernierati sull'asse Oz, a distanza L fra loro, mentre l'estremo C è vincolato a scorrere su AB. Supposti i vincoli lisci, si chiede di

(a) scrivere le equazioni differenziali del moto del sistema;

(b) determinare eventuali integrali primi del moto.

Supposto ora il piano π uniformemente rotante, con velocità angolare costante $\vec{\omega}$ attorno ad Oz

(c) determinare il valore di ω^2 affinché sia di equilibrio relativo la configurazione corrispondente all'angolo $O\widehat{A}B = \dfrac{\pi}{3}$ e studiare la stabilità di tale configurazione.

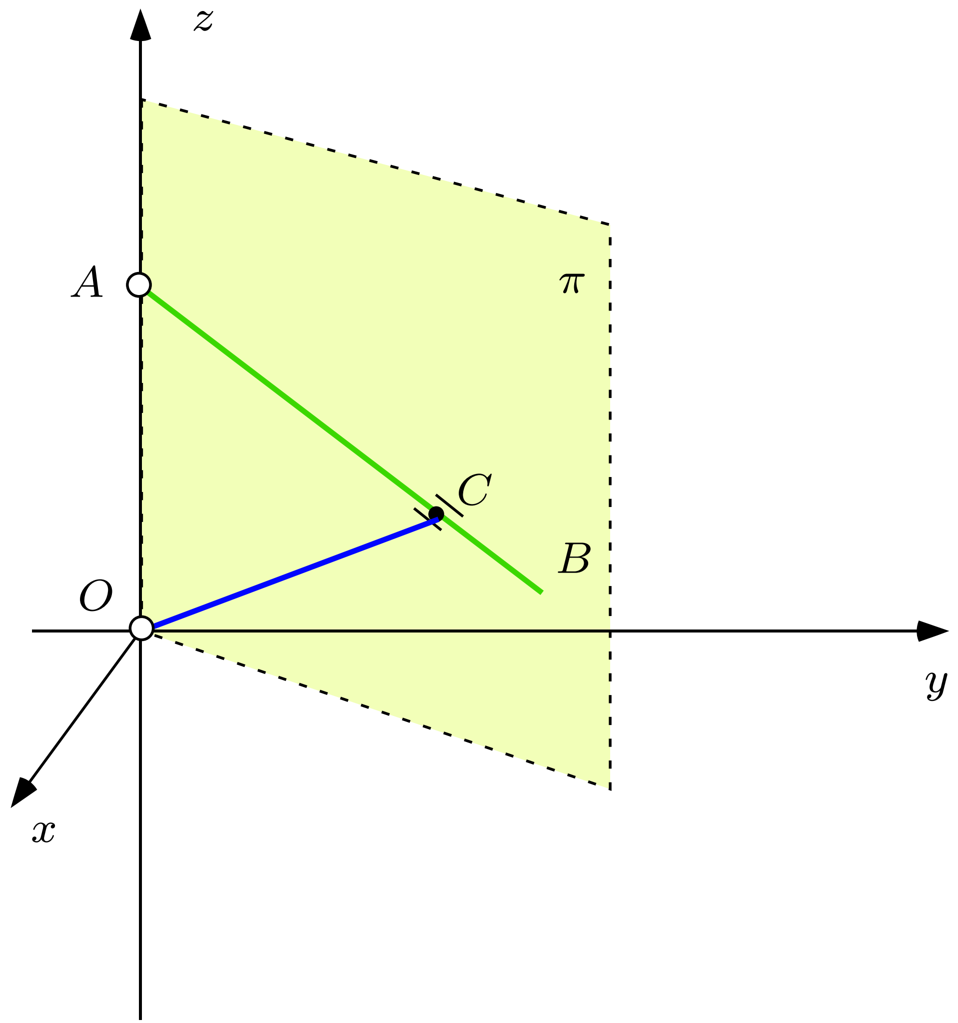


Figura 1:

Risoluzione. Sistema materiale olonomo, a vincoli lisci e fissi, soggetto a forze conservative, con due gradi di libertà. Siano

$q_1 = \varphi \in [0, 2\pi)$ $\quad\varphi$ angolo compreso tra il piano xz ed il piano π;

$q_2 = \theta \in [0, 2\pi)$ $\quad\theta = O\widehat{A}C$.

▶ Il potenziale delle forze applicate al sistema è

$$\boxed{\mathcal{U} = -2mg\, z_G - mg\, z_P + c}$$

dove

$$\begin{aligned} z_G &= L - L\,\cos\theta \\ z_P &= L\,\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -L\,\cos 2\theta\,. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\mathcal{U} = mgL\,\cos 2\theta\, + 2mgL\,\cos\theta + c$$

L'energia cinetica del sistema è

$$\boxed{T = T_{AB} + T_P = \frac{1}{2} m v_P^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I}_A \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}$$

dove

$$\begin{aligned} v_P^2 &= L^2 \sin^2 2\theta \, \dot{\varphi}^2 + 4 \, L^2 \, \dot{\theta}^2 \\ \vec{\omega} &= \dot{\varphi} \vec{k} + \dot{\theta} \vec{\jmath}_3 = \\ &= -\dot{\varphi} \cos\theta \, \vec{\jmath}_1 + \dot{\varphi} \sin\theta \, \vec{\jmath}_2 + \dot{\theta} \, \vec{\jmath}_3 \end{aligned}$$

avendo indicato con $A\vec{\jmath}_1\vec{\jmath}_2\vec{\jmath}_3$ un riferimento solidale con AB ($A\vec{\jmath}_1$ supporto di AB) e

$$\mathbf{I}_A = 2m \, \frac{1}{3} \, 4L^2 \, \mathrm{diag}(0, 1, 1) \, .$$

L'energia cinetica dell'asta AB è dunque

$$T_{AB} = \frac{1}{2}\,\frac{8}{3}\,mL^2(\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 + \dot\theta^2)$$

da cui l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\,mL^2\,[5\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,(3\cos^2\theta + 2)\dot\varphi^2]\,.$$

Considerata la langrangiana del sistema $\mathcal{L} = T + \mathcal{U}$ e applicate le equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \end{cases}$$

si trova

$$\begin{cases} \dfrac{20}{3} mL^2 \ddot{\theta} - \dfrac{2}{3} mL^2 \dot{\varphi}^2 \ \sin 2\theta (3\cos 2\theta + 2) + 2mgL(\sin\theta + \sin 2\theta) = 0 \\ 2\sin\theta \ \cos\theta (3\cos 2\theta + 2)\dot{\theta}\dot{\varphi} - 6\sin^3\theta \ \cos\theta \, \dot{\theta} \, \dot{\varphi} + \sin^2\theta (3\cos^2\theta + 2)\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

▶ Poiché $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$, si ricava l'integrale primo $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = c$ cioè

$$\sin^2\theta (3\cos^2\theta + 2)\dot{\varphi} = c \, .$$

Inoltre si conserva l'energia meccanica del sistema e quindi un secondo integrale primo è dato da $T + \mathcal{V} = E$, cioè

$$\frac{1}{2} \, \frac{4}{3} \, mL^2 \, [5\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, (3\cos^2\theta + 2)\dot{\varphi}^2] - mgL \, \cos 2\theta \, - 2mgL \, \cos\theta = E \, .$$

▶ Se $\dot{\varphi} = \omega \in \mathbb{R}^+$, il sistema ha un solo grado di libertà.

Nel riferimento relativo (piano π):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \mathcal{U}_{\text{reali}} + \mathcal{U}_{\text{centrifughe}} \\
\mathcal{U}_{\text{centrifughe}} &= \frac{2}{3}\, mL^2\omega^2 \, \sin^2\theta(3\cos^2\theta + 2)
\end{aligned}
$$

da cui, applicando il metodo della stazionarietà del potenziale, si ha

$$
\frac{d\mathcal{U}}{d\theta} = -2mgL\,\sin\theta(1 + 2\cos\theta) + \frac{4}{3}\, m\omega^2 L^2\, \sin\theta\, \cos\theta(3\cos 2\theta + 2)\,.
$$

Se $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ è posizione di equilibrio,

$$
\left.\frac{d\mathcal{U}}{d\theta}\right|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = 12\,\frac{g}{L}
$$

inoltre $\left.\dfrac{d^2\mathcal{U}}{d\theta^2}\right|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = -39mgL < 0 \Rightarrow$ stabile. □

Esercizio 2. Nel piano verticale Oxy si consideri il sistema materiale pesante costituito da un triangolo rettangolo omogeneo ABD, di massa m e cateti $\overline{AB} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,R$, $\overline{AD} = \dfrac{3}{2}\,R$ scorrevole senza attrito con il lato AB su Ox, e da una circonferenza omogenea, di massa m e raggio R, che rotola senza strisciare su Oy ed è vincolata a passare per un anellino saldato in D. Oltre alle forze peso, sul sistema agiscono una forza viscosa $\vec{F}_v = -h\,\vec{v}_A$, $h > 0$, ed una coppia applicata alla circonferenza di momento $\vec{M} = \beta\,\dfrac{mg}{R}(D-G)\wedge(C-G)$, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Si chiede:

(a) determinare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità al variare di β;

(b) scrivere l'equazione differenziale del moto.

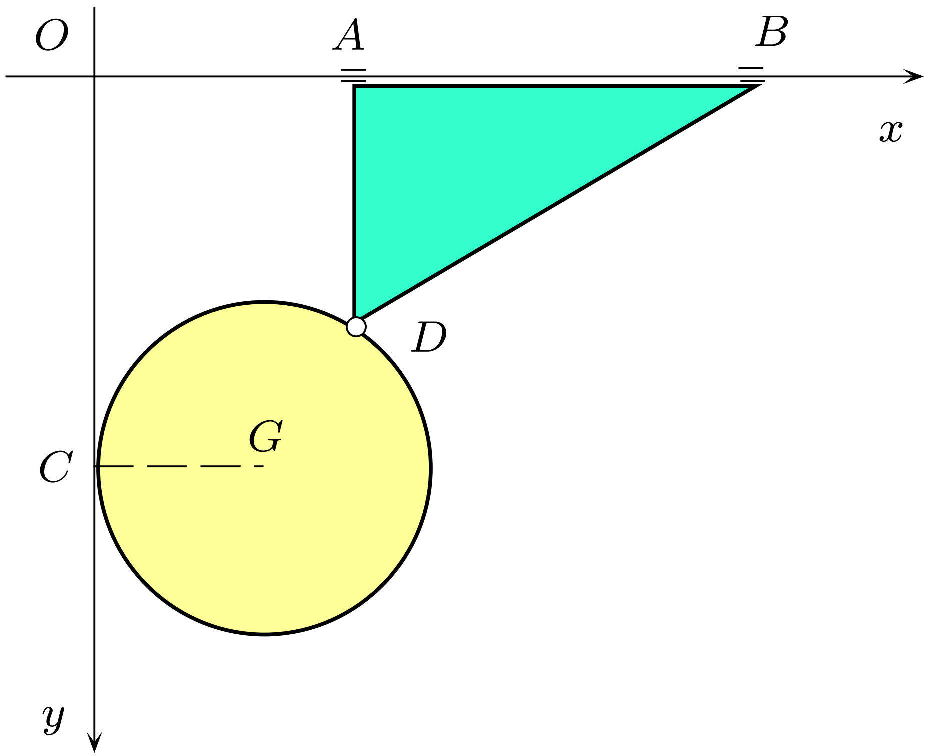


Figura 2:

Risoluzione. Sistema materiale olonomo, a vincoli fissi, con un grado di libertà. Sia

$$q = C\widehat{G}D = \theta \in [0\,,\,2\pi)\,.$$

Siano

$$\begin{aligned}
(G-O) &= R\,\vec{\imath} + \left[\frac{3}{2}R + R\,\sin(\pi-\theta)\right]\vec{\jmath} = R\,\vec{\imath} + \left(\frac{3}{2}R + R\,\sin\theta\right)\vec{\jmath} \\
\vec{v}_G &= R\,\cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{\jmath} \\
(D-O) &= R(1-\cos\theta)\vec{\imath} + \frac{3}{2}R\,\vec{\jmath} \\
\vec{v}_D &= R\,\sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{\imath}.
\end{aligned}$$

Dall'ipotesi di rotolamento senza strisciamento del disco sull'asse y, si ottiene l'espressione di $\vec{\omega}$, velocità angolare del disco, in funzione del parametro lagrangiano θ. Infatti si ha

$$\omega\,R\,\vec{\jmath} = \vec{v}_G = R\cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{\jmath} \;\Rightarrow\; \omega = \cos\theta\,\dot{\theta}\,.$$

▶ Il potenziale delle forze applicate al sistema è

$$\boxed{\mathcal{U} = mg\, y_G + \mathcal{U}_{\text{coppia}} + c}$$

dove

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{3}{2}R + R\, \sin\theta \\ \vec{M} &= -\beta\, mg\, R\, \sin\theta\, \vec{k}\,. \end{aligned}$$

▶ Mediante il metodo di stazionarietà del potenziale, considerata l'equazione

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\theta} = mg\, R\, \cos\theta - \beta\, mg\, R\, \sin\theta\, \cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \cos\theta = 0 \;\vee\; \sin\theta = \frac{1}{\beta}$$

si determinano le seguenti posizioni di equilibrio ordinarie:

- se $0 < \beta < 1$,

$$\theta = \frac{\pi}{2} \ \vee \ \theta = \frac{3}{2}\pi$$

- se $\beta \geq 1$, $\bar{\theta} := \arcsin \dfrac{1}{\beta}$,

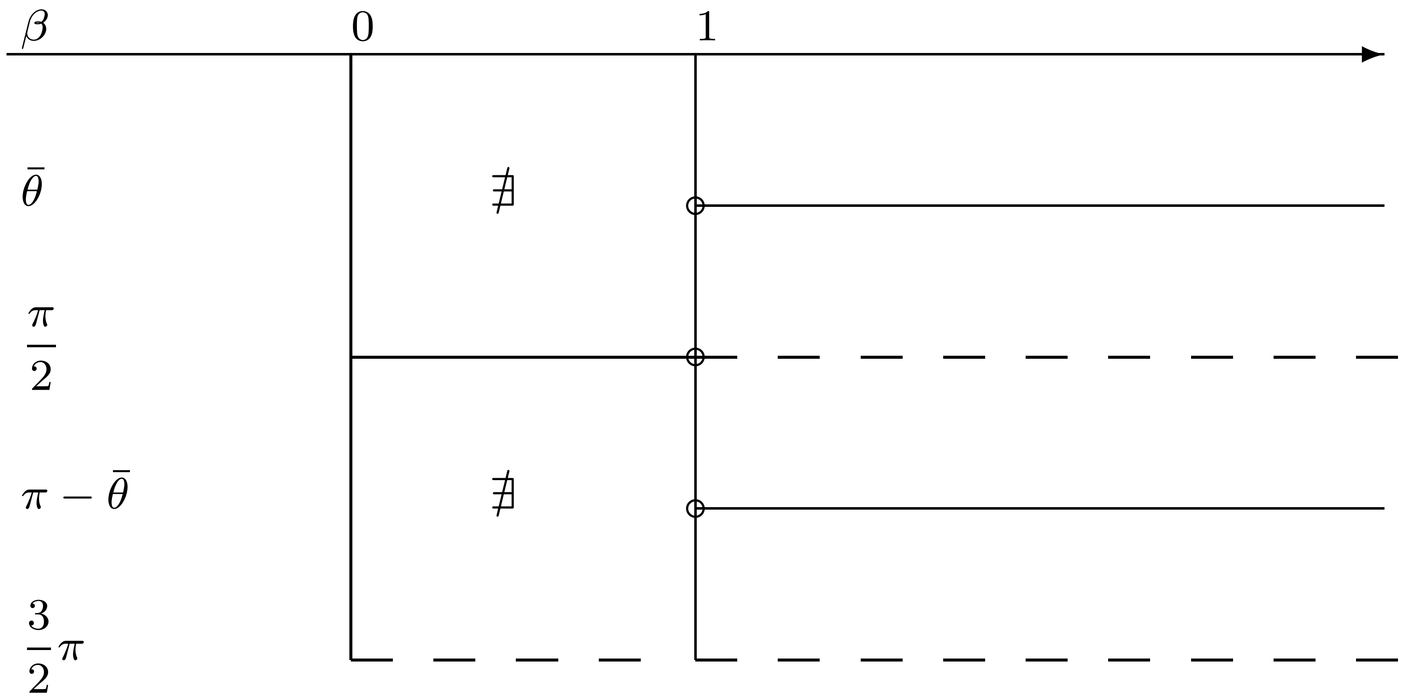
$$\theta = \frac{\pi}{2} \ \vee \ \theta = \frac{3}{2}\pi \ \vee \ \theta = \bar{\theta} \ \vee \ \theta = \pi - \bar{\theta}\,.$$

▶ Per lo studio della stabilità, essendo

$$\frac{d^2\mathcal{U}}{d\theta^2} = -mgR\,\sin\theta - \beta\,mgR\,(1 - 2\,\sin^2\theta)\theta)$$

risultano stabili $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ se $0 < \beta < 1$, $\theta = \bar{\theta}$ e $\theta = \pi - \bar{\theta}$ se $\beta > 1$.

$\beta = 1$ è un punto di biforcazione stabile.



▶ L'energia cinetica del sistema è

$$T = T_L + T_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} m v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2$$

dove $I_{Cz} = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$ e G_1 è il baricentro della lamina triangolare. Pertanto l'energia cinetica del sistema materiale è

$$T = \frac{1}{2}\, mR^2 (1 + \cos^2\theta)\dot{\theta}^2 \,.$$

▶ Indicato con Q_θ^* la componente lagrangiana della forza viscosa $\vec{F}_v$, si ha

$$Q_\theta^* = \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{v}_A}{\partial \dot{\theta}} = -h\, \vec{v}_A \cdot \frac{\partial \vec{v}_A}{\partial \dot{\theta}} = -h\, \vec{v}_A \cdot \frac{\partial A}{\partial \theta} = -hR^2 \, \sin^2\theta\, \dot{\theta} \,.$$

Dalla

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + Q_v^*}$$

si ricava l'equazione differenziale del moto richiesta:

$$(1 + \cos^2\theta)\ddot\theta - \frac{1}{2}\,\sin 2\theta\,\dot\theta^2 + \frac{h}{m}\,\sin^2\theta\,\dot\theta - \frac{g}{R}\,\cos\theta + \frac{\beta\,g}{2R}\,\sin 2\theta = 0\,.$$