Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Meccanica analitica

III parte

Maria Grazia Naso

naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

Esercizio 1. Si consideri in un piano orizzontale uniformemente rotante con velocità angolare $\vec{\omega}$ costante attorno ad O, un sistema materiale pesante costituito da un'asta omogenea AB, di massa m e lunghezza $2L$, e da un punto materiale P di massa m. L'asta ha gli estremi A e B vincolati a scorrere rispettivamente sugli assi Ox e Oy del riferimento cartesiano, mentre il punto P è vincolato a scorrere su una retta parallela all'asse Oy di equazione $x = 4L$, tra i punti C e D di coordinate rispettivamente $(4L, l)$, $(4L, -l)$, senza poterli raggiungere. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto P con l'estremo A dell'asta. Supposti i vincoli lisci, si chiede di

(a) determinare le configurazioni di equilibrio relativo ordinarie del sistema materiale (asta + punto) e discuterne la stabilità nel caso in cui $\omega^2 \neq \dfrac{k}{m}$;

(b) scrivere le equazioni differenziali del moto del sistema;

(c) calcolare la reazione vincolare dinamica in P.

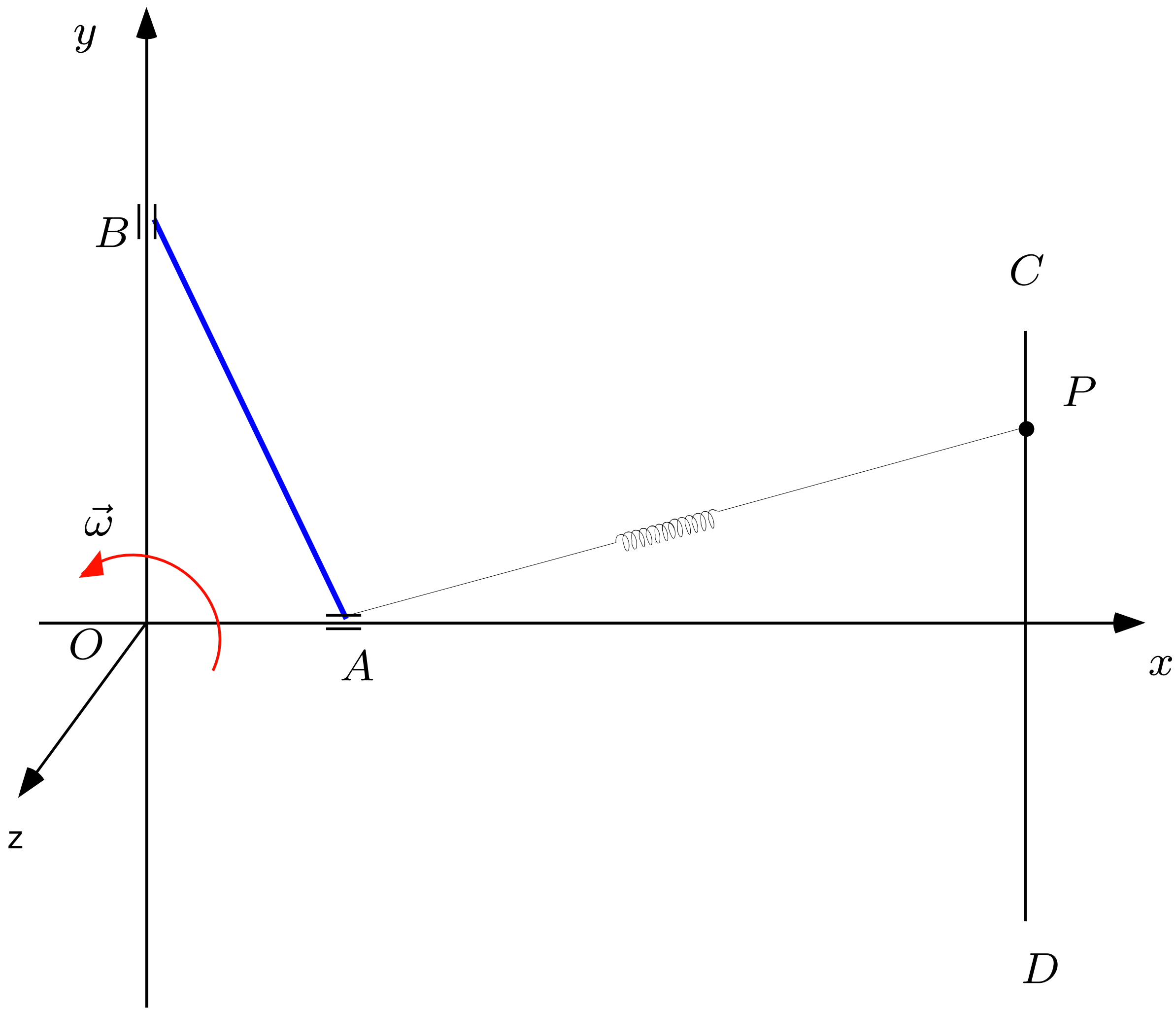

Figura 1:

Risoluzione. Sistema materiale olonomo, a vincoli lisci e fissi nel riferimento relativo, con due gradi di libertà. Siano

$$q_1 = x^- \widehat{A} B = \theta \in [0, 2\pi)$$
$$q_2 = (P - H) \cdot \frac{(D - C)}{2l} = \xi \in (-l, l) \, .$$

▶ Il potenziale delle forze applicate al sistema è

$$\boxed{\mathcal{U} = -\frac{1}{2}\, k\, |P - A|^2 + \frac{1}{2}\, I_{Oz}(AB)\, \omega^2 + \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, |P - O|^2 + c}$$

dove

$$\begin{aligned} (P - A) &= (4L - 2L\, \cos\theta\, ,\, \xi) \\ I_{Oz}(AB) &= I_{Gz}(AB) + m\, L^2 = \text{costante}\, . \end{aligned}$$

Pertanto

$$\mathcal{U} = -\frac{k}{2}\left[4L^2(2 - \cos\theta)^2 + \xi^2\right] + \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, \xi^2 + c\, .$$

▶ Mediante il metodo di stazionarietà del potenziale, si trovano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = (m\,\omega^2 - k)\xi = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \xi = 0 & \text{se } \omega^2 \neq \dfrac{k}{m} \\ \xi \text{ qualunque} & \text{se } \omega^2 = \dfrac{k}{m} \end{cases} \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = -4kL^2(2 - \cos\theta)\sin\theta = 0 \;\Rightarrow\; \sin\theta = 0 \;\Rightarrow\; \theta = 0 \,\vee\, \theta = \pi\,, \end{cases}$$

da cui si determinano le seguenti posizioni di equilibrio ordinarie:

- se $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$, $(0,\xi) \;\vee\; (\pi,\xi)$.
- se $\omega^2 \neq \dfrac{k}{m}$, $(0,0) \;\vee\; (\pi,0)$.

▶ Per lo studio della stabilità, nel caso in cui $\omega^2 \neq \dfrac{k}{m}$, essendo

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \xi^2} = m\omega^2 - k\,, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \xi\,\partial \theta} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} = -4kL^2(2\,\cos\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

risulta stabile la configurazione $(0,0)$, se $\omega^2 < \dfrac{k}{m}$.

▶ L'energia cinetica del sistema è

$$\boxed{T = T_P + T_{AB} = \frac{1}{2} m v_P^2 + \frac{1}{2} m v_G^2 + T'}$$

dove

$$v_P^2 = \dot{\xi}^2 \,, \quad v_G^2 = L^2\,\dot{\theta}^2 \,, \quad T' = \frac{1}{2}\,\frac{m4l^2}{12}\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m\,l^2}{3}\,\dot{\theta}^2 \,.$$

Quindi $T = \dfrac{1}{2}\,m\left(\dot{\xi}^2 + \dfrac{4}{3}\,L^2\,\dot{\theta}^2\right)$.

▶ Le equazioni differenziali del moto del sistema di ottengono da

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^*\,, \qquad i = 1, 2}$$

dove con Q_i^* indichiamo le componenti lagrangiane delle forze di Coriolis:

▷ per il punto materiale (P, m): $\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}_r = -2m\,\omega\,\vec{k} \times \dot{\xi}\,\vec{\jmath} = 2m\,\omega\,\dot{\xi}\,\vec{\imath}$.

Inoltre $\dfrac{\partial P}{\partial \theta} = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial \xi} = \vec{\jmath}$, da cui si hanno $Q_\xi^*(P) \equiv 0$, $Q_\theta^*(P) \equiv 0$.

▷ per un punto $(P_i, m_i) \in AB$, indicato con $s = \overline{PB} \in [0, 2L]$, si ha $P_i \equiv (s\,\cos\theta\,,\,(2L - s)\sin\theta)$, da cui

$$\vec{F}_{\text{cor}}(P_i) = -2m_i\,\vec{\omega} \times \left(\dot{x}_{P_i}\,\vec{\imath} + \dot{y}_{P_i}\,\vec{\jmath}\right) = 2m_i\,\omega\,\left(\dot{y}_{P_i}\,\vec{\imath} - \dot{x}_{P_i}\,\vec{\jmath}\right)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta} = (-s\,\sin\theta\,,\,(2L - s)\cos\theta)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \xi} = 0\,.$$

Quindi $Q_\xi^*(AB) \equiv 0$, $Q_\theta^*(AB) \equiv 0$.

Le equazioni differenziali del moto sono date da

$$\ddot{\theta} + \frac{3k}{m}\,\sin\theta(2-\cos\theta) = 0$$

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\xi = 0\,.$$

▶ Nel riferimento relativo considero il solo punto P:

$$m\,\vec{a}_r = m\,\vec{g} - k(P-A) - m\,\vec{a}_\tau - m\,\vec{a}_c + \vec{\Phi}_P\,.$$

In componenti fornisce

$$\begin{cases} 0 = -2kL(2-\cos\theta) + m\,\omega^2\,4L + 2\,m\,\omega\,\dot{\xi} + \Phi_{P_x} \\ m\,\ddot{\xi} = -k\,\xi + m\,\omega^2\,\xi \quad \text{equazione del moto di } P \\ 0 = -mg + \Phi_{P_z} \end{cases}$$

e quindi $\vec{\Phi}_P = \left[2kL(2-\cos\theta) - 4mL\,\omega^2 - 2m\,\omega\,\dot{\xi}\right]\vec{\imath} + mg\,\vec{k}$.