CALCOLO VETTORIALE

Ogni grandezza fisica risulta matematicamente ben definita quando è possibile associare ad essa un opportuno ente matematico in modo da rappresentare quantitativamente le sue caratteristiche fisiche.
Le grandezze si dividono in:

- **scalari** (come la massa, il lavoro, l'energia cinetica) individuate da un valore numerico;
- **vettoriali** (come la velocità, l'accelerazione, le forze) individuate da un numero, una direzione e un verso.

Ogni fenomeno di moto avviene in un ambiente spazio-temporale descritto matematicamente da uno Spazio Euclideo Affine Tridimensionale indicato con $\mathcal{E}_3$ i cui elementi $P, Q, \ldots$ sono detti punti.

$\mathcal{A}$ contiene un sottospazio vettoriale euclideo $\mathbb{W}$ detto spazio delle traslazioni su $\mathcal{A}$:

$\mathbb{W} := \{ \vec{u} : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \mid \forall (P, Q) \in \mathcal{A}$ i segmenti orientati $(P' - P), (Q' - Q)$ dove $P' = \vec{u}(P)$, $Q' = \vec{u}(Q)$ sono equipollenti, cioè hanno la stessa direzione, lunghezza e verso $\}$.

Ogni elemento di $\mathbb{W}$ è detto vettore.

Per ogni coppia di punti $(P, Q) \in \mathcal{A}$ esiste sempre un vettore $\vec{u} \in \mathbb{W}$ tale che:

$$\vec{u}(P) = Q$$

cioè il vettore $\vec{u}$ corrisponde alla traslazione individuata dal segmento PQ.

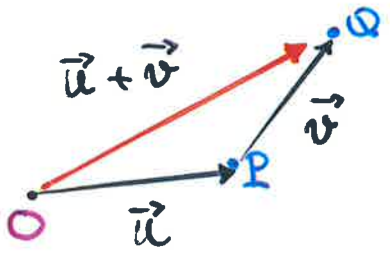
Fissato un punto $O \in \mathcal{A}$ detto origine, esiste una applicazione biunivoca $\left(\frac{1-1}{su}\right)$ che ad ogni $P \in \mathcal{A}$ fa corrispondere un vettore $\vec{u} \in \mathbb{W}$: $\vec{u}(O) = P$.

N.B.: Il vettore $(P - O)$ non rappresenta il segmento orientato OP, ma il vettore $\vec{u}$ tale che $\vec{u}(O) = P$ cioè la classe di equivalenza di tutti i segmenti orientati equipollenti.

OPERAZIONI

Ogni vettore $\vec{u}$ può rappresentarsi col simbolo $\vec{u} = (P-O)$.

SOMMA : Dati $\vec{u}, \vec{v} \in V$: $\vec{u} = (P-O)$; $\vec{v} = (Q-P)$



$$\vec{u}+\vec{v} := (P-O)+(Q-P) = (Q-O)$$

che gode delle seguenti proprietà:

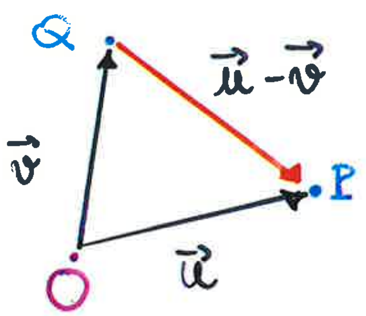
1) è associativa $\quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

2) dato $\lambda \in \mathbb{R}$ si definisce $\lambda\vec{v}$ il vettore con direzione di $\vec{v}$ e verso uguale o opposto a quello di $\vec{v}$ se λ è positivo o negativo.

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u}$$

Valgono poi tutte le proprietà dello spazio vettoriale V.

DIFFERENZA : Dati $\vec{u}, \vec{v} \in V$: $\vec{u} = (P-O)$; $\vec{v} = (Q-O)$



$$\vec{u}-\vec{v} := \vec{u}+(-\vec{v}) = (P-O)+(O-Q)$$

$$= (P-Q).$$

In $\mathbb{V}$ esiste un'applicazione detta PRODOTTO SCALARE:

$$"\cdot" : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$$

1) simmetrica $\qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2) bilineare $\qquad (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}$

3) positiva $\qquad \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

Si definisce modulo di $\vec{u}$ lo scalare:

$$u = |\vec{u}| = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{1/2}$$

e si ha che $|\vec{u}| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$.

Se $|\vec{u}| = 1 \Rightarrow \vec{u}$ è un versore.

Poichè $\dim \mathbb{V} = 3$ esiste una base di 3 vettori non complanari $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ tale che:

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{V} \qquad \vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$$

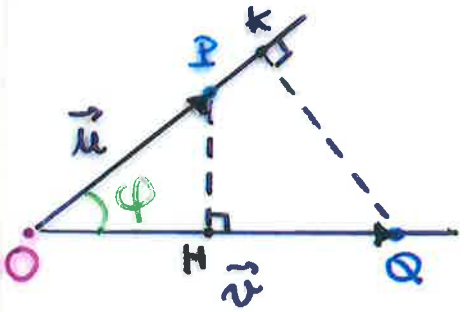
$(u_i)_{i=1,2,3}$ sono dette componenti di $\vec{u}$ rispetto alla base $\{\vec{e}_i\}$.

PRODOTTO SCALARE

Dati $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ definiamo prodotto scalare "$\cdot$"

lo scalare :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := u\, v \cos\varphi$$



$$= u\, \overline{OK} = v\, \overline{OH}$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ se $\vec{u}$ o $\vec{v}$ nulli

se $\vec{u} \perp \vec{v}$ $(\varphi = \pm \pi/2)$

<u>Teorema 1</u> Se un vettore $\vec{u} \in \mathbb{V}$ è tale che

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{V} \implies \vec{u} = \vec{0}.$$

<u>Dim</u>: Poichè $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \ \forall \vec{v} \in \mathbb{V}$, basta scegliere $\vec{v} \equiv \vec{u}$ perciò $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \implies \vec{u} = \vec{0}$.

<u>Teorema 2</u> Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono 3 vettori linearmente indipendenti per cui $\vec{u} \in \mathbb{V}$ è tale che :

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0, \ \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0, \ \vec{u} \cdot \vec{v}_3 = 0 \implies \vec{u} = \vec{0}.$$

<u>Dim</u>: Ricordiamo la def. di vettori linearmente dipendenti:

<u>Def</u>: n vettori $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ si dicono linearmente dipendenti se esistono n costanti non tutte nulle $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}.$$

In caso contrario $\{\vec{u}_i\}_{i=1,\dots,n}$ si dicono linearmente indipendenti.

Allora se $\vec{u}\cdot\vec{v}_i = 0 \quad i=1,2,3$, qualunque sia $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\lambda_i\, \vec{u}\cdot\vec{v}_i = 0 \qquad i=1,2,3 .$$

pertanto

$$\vec{u}\cdot(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3) = 0$$

Poichè $\{\vec{v}_i\}_{i=1,2,3}$ sono lin. indip., ogni $\vec{v}\in\mathbb{V}$:

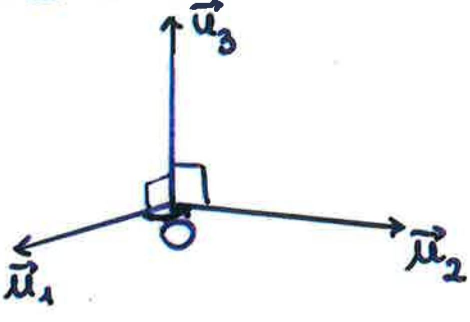
$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3$$

e quindi

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \quad \forall\, \vec{v}\in\mathbb{V} \overset{TH.\,1}{\Longrightarrow} \vec{u} = \vec{0} .$$

Def: 3 vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sono complanari se $\vec{u}_1 = (P_1 - O)$, $\vec{u}_2 = (P_2 - O)$; $\vec{u}_3 = (P_3 - O) \in \pi$ piano.

Def: 3 vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ non complanari formano una terna destra se i corrispondenti segmenti orientati presi con la stessa origine hanno la direzione del pollice, indice e medio della mano destra.



Def: Dati $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{V}$ tali che:

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$$

$$\vec{v} = \vec{e}_1$$

dove $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è una terna destra ortonormale

cioè $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$ simbolo di kronecker per le proprietà del prodotto scalare si ha che:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} := u\cdot 1\cdot\cos\varphi_1 \qquad \varphi_1 = \widehat{\vec{u},\vec{v}}$$

e anche

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3)\cdot\vec{e}_1 = \alpha_i\,\delta_{iJ} = \begin{cases}\alpha_i & i=J\\ 0 & i\neq J\end{cases}$$

$$= \alpha_1$$

pertanto

$$\underline{\alpha_1 = u\cos\varphi_1}$$

da cui

$$\boxed{\cos\varphi_1 = \frac{\alpha_1}{u} = \frac{\alpha_1}{|\vec{u}|}}$$

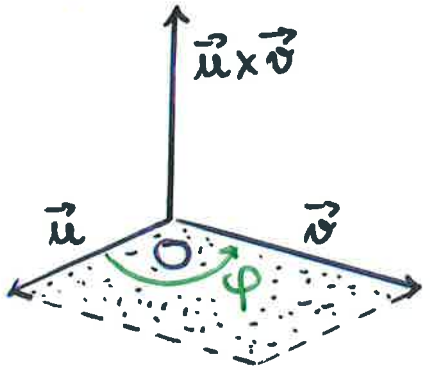
ma $|\vec{u}| = (\vec{u}\cdot\vec{u})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2\right)^{1/2}$

quindi, in generale, si definiscono i coseni direttori di un vettore $\vec{u}\in\mathbb{V}$:

$$\boxed{\cos\varphi_i = \frac{\alpha_i}{|\vec{u}|} = \frac{\alpha_i}{\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2\right)^{1/2}} \qquad i=1,2,3.}$$

PRODOTTO VETTORIALE

Dati $\vec{u}, \vec{v} \in V$, si definisce prodotto vettoriale "$\times$" il vettore: $\vec{u} \times \vec{v}$ avente modulo



$$|\vec{u} \times \vec{v}| = u\, v \operatorname{sen} \varphi$$
$$= A_{\text{parallelogramma}}(\vec{u}, \vec{v})$$

direzione ortogonale al piano $\perp \vec{u}, \vec{v}$

e verso tale che $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ formino una terna destra.

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se $\vec{u}$ o $\vec{v}$ nulli

se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ $(\varphi = 0, \pi)$

Teorema Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:

1) anticommutatività $\quad \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

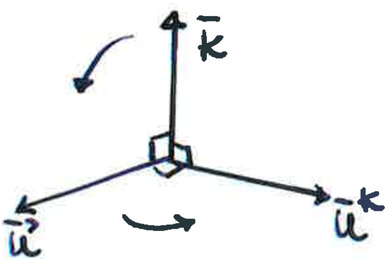
2) distributività $\quad \vec{v} \times (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \vec{v} \times \vec{u}_1 + \vec{v} \times \vec{u}_2$

Dim: •) Per la def. di p.v. l'area del parallelogramma non cambia se cambio l'ordine dei fattori e inoltre $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \times \vec{u})$ è ancora una terna destra.

••) caso particolare.

Sia $\vec{k}$: $|\vec{k}| = 1$ versore, e $\vec{u}$ tali che $\vec{u} \cdot \vec{k} = 0$.

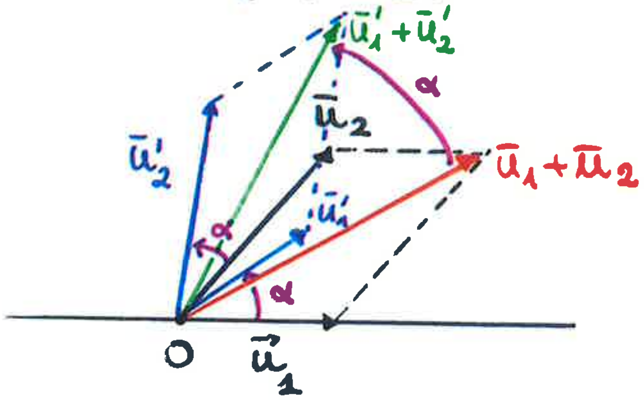
Il vettore $\vec{k} \times \vec{u} := \vec{u}^{\,k}$ è un vettore ottenuto facendo ruotare $\vec{u}$ di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario rispetto a $\vec{k}$.



$$|\vec{k} \times \vec{u}| = 1 \cdot u \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = u$$

Se $\vec{k}$ è ortogonale ad $\vec{u}_1, \vec{u}_2$:

$$\vec{k} \times (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \vec{k} \times \vec{u}_1 + \vec{k} \times \vec{u}_2$$



Ruotare di uno stesso angolo α due vettori e sommare i vettori ruotati è come ruotare dello stesso angolo il vettore somma.

Nel nostro caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

La proprietà inoltre vale se:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{u}_{01} + \alpha_1 \vec{k} \\ \vec{u}_2 = \vec{u}_{02} + \alpha_2 \vec{k} \end{cases} \qquad \vec{k} \times \alpha_i \vec{k} \equiv \vec{0} \quad i = 1, 2.$$

Inoltre sappiamo che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha \vec{u}) \times \vec{v} = \alpha (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (\alpha \vec{v})$$

quindi:

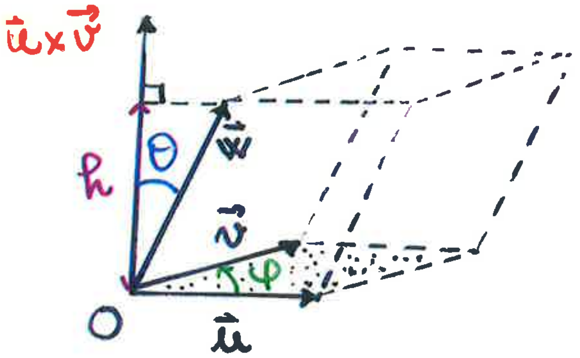
$$\alpha \vec{k} \times (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = (\alpha \vec{k}) \times \vec{u}_1 + (\alpha \vec{k}) \times \vec{u}_2$$

Posto $\vec{v} = \alpha \vec{k}$

$$\vec{v} \times (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \vec{v} \times \vec{u}_1 + \vec{v} \times \vec{u}_2 . \blacksquare$$

PRODOTTO MISTO

Dati $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, si definisce il prodotto misto "$(\times, \cdot)$" lo scalare:



$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = V_{\substack{\text{parallelepipedo} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}}$$

$$= (u v \, \text{sen}\varphi) \, w \cos\theta$$

$$= A h = V$$

avente segno $\pm$ a seconda che $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ formino una terna destra o sinistra non ortogonale.

$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$
- se $\vec{u}$ o $\vec{v}$ o $\vec{w}$ nulli
- se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono complanari
- se ci sono 2 vettori uguali

Proprietà

1) posso scambiare il segno di prodotto scalare "$\cdot$" col segno di prodotto vettoriale "$\times$".

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

2) Il volume del parallelepipedo rimane invariato:

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$$

3) $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = - \vec{v} \times \vec{u} \cdot \vec{w}$

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

Scegliamo come base in $\mathbb{V}$ una terna destra ortonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. A tali versori possiamo associare una terna di assi orientati (x_1, x_2, x_3) passanti per O, detta sistema di coordinate cartesiane di origine O, diretti come $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Ogni $\vec{v} \in \mathbb{V}$:

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

dove

$$v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i = v \cdot 1 \cos(\vec{v}, \vec{e}_i) = v \cos\varphi_i \quad i = 1, 2, 3$$

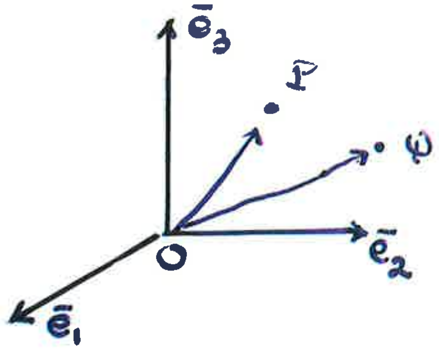
Rispetto ad $Ox_1x_2x_3$ siano date le coordinate cartesiane di due punti P, Q: $P = (x_1, x_2, x_3)$ $Q = (y_1, y_2, y_3)$.

Allora:

$$P - O = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

$$Q - O = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3$$

$$|P - Q| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2}$$



Poiché valgono le seguenti relazioni:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \qquad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_i = \vec{0} \quad \forall i$$

Il prodotto vettoriale tra due vettori $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ può esprimersi:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\sum_{i=1}^{3} u_i \vec{e}_i\right) \times \left(\sum_{k=1}^{3} v_k \vec{e}_k\right)$$

$$= (u_2 v_3 - v_2 u_3)\vec{e}_1 + (v_1 u_3 - u_1 v_3)\vec{e}_2 + (u_1 v_2 - v_1 u_2)\vec{e}_3$$

$$= \det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Analogamente il prodotto misto tra i vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \left[\left(\sum_{i=1}^{3} u_i \vec{e}_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} v_j \vec{e}_j\right)\right] \cdot \left(\sum_{k=1}^{3} w_k \vec{e}_k\right)$$

$$= w_1 (u_2 v_3 - v_2 u_3) + w_2 (v_1 u_3 - u_1 v_3) +$$
$$+ w_3 (u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

$$= \det \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

<u>Osservazione</u>

Se $\vec{u} = \sum_i u_i \vec{e}_i$, $\vec{v} = \sum_i v_i \vec{e}_i$

- $\vec{u} + \vec{v} = \sum_i (u_i + v_i) \vec{e}_i$
- $\vec{u} = \vec{v} \Rightarrow u_i = v_i \quad \forall i$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_i u_i v_i$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \sum_i (u_i)^2$
- $\lambda \vec{u} = \lambda \sum_i u_i \vec{e}_i = \sum_i (\lambda u_i) \vec{e}_i$

DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE

Dati $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ si definisce doppio prodotto vettoriale il vettore: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

Proprietà

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$$

Dim:

Scegliamo un rif. $Ox_1x_2x_3$: $Ox_1 \parallel \vec{u}$, $Ox_2 \in$ piano π che contiene i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $Ox_3 \perp \pi$. Allora:

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1$$
$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$$
$$\vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 + w_3 \vec{e}_3$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) = u_1 \vec{e}_1 \times (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) = u_1 v_2 \vec{e}_3$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = u_1 v_2 \vec{e}_3 \times (w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 + w_3 \vec{e}_3)$$
$$= u_1 v_2 w_1 \vec{e}_2 - u_1 v_2 w_2 \vec{e}_1$$

aggiungo e tolgo il termine $\boxed{u_1 v_1 w_1 \vec{e}_1}$

$$= -u_1 (v_2 w_2 + v_1 w_1)\vec{e}_1 + u_1 w_1 (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2)$$
$$= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$$

N.B. Non vale la proprietà associativa cioè:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$$

Se lo fosse $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u}$ e per la prop

$$(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w}$$

e ciò è vero sse $\vec{u} \parallel \vec{w}$.

DIVISIONE VETTORIALE

Dati $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ con $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$ determinare il vettore $\vec{x} \in \mathbb{V}$ tale che:

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$$

La condizione $\vec{u} \perp \vec{v}$ è una condizione necessaria per la buona posizione del problema. Infatti, moltiplicando scalarmente per $\vec{u}$ i membri dell'equazione si ha:

$$\underbrace{(\vec{x} \times \vec{u}) \cdot \vec{u}}_{0} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Una soluzione è $\vec{x}_0 = \dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{u^2}$. Infatti sostituendo:

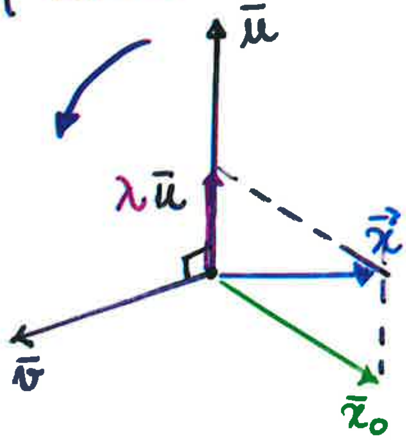
$$\left(\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{u^2}\right) \times \vec{u} = \frac{1}{u^2}\left[\underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{u})}_{u^2}\vec{v} - \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{u})}_{0}\vec{u}\right] = \vec{v}$$

Ma è soluzione anche $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Infatti:

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{x}_0 \times \vec{u} + \lambda \underbrace{\vec{u} \times \vec{u}}_{\vec{0}} = \vec{v}$$

quindi:



$$\boxed{\vec{x} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{u^2} + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

FUNZIONI VETTORIALI

Consideriamo una funzione $\vec{u}(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{V}$.

Rispetto ad $Ox_1x_2x_3$:

$$\vec{u}(t) = \sum_{i=1}^{3} u_i(t)\vec{e}_i$$

Alla funzione $\vec{u}$ vettoriale sono associate 3 funzioni $u_i(t)$ $i=1,2,3$ a valori scalari. Pertanto alle funzioni a valori vettoriali si possono estendere tutte le proprietà delle funzioni a valori scalari. (definizione di limite, derivata, integrale e loro proprietà, etc)

Osservazione

- Se $\vec{u}(t)$ è costante in modulo cioè $\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t) = u^2(t) = k$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t)\right] = 2\frac{d\vec{u}}{dt}(t)\cdot\vec{u}(t) = \frac{dk}{dt} = 0$$

pertanto: $\boxed{\frac{d}{dt}\vec{u} \perp \vec{u}.}$

- Se $\vec{u}(t)$ è una funzione composta cioè:

$$\vec{u}(t) = \vec{u}[s(t)] = \sum_{J=1}^{3} u_J[s(t)]\,\vec{e}_J$$

$$\dot{\vec{u}} = \boxed{\frac{d}{dt}\vec{u}(t)} = \sum_{J=1}^{3}\frac{d}{dt}\left(u_J[s(t)]\right)\vec{e}_J = \left(\sum_{J=1}^{3}\frac{d}{ds}u_J(s)\,\vec{e}_J\right)\frac{ds}{dt}$$

$$= \boxed{\frac{d\vec{u}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec{u}}{ds}\dot{s}$$

- Se $\vec{u}$ è derivabile su I chiamiamo differenziale di $\vec{u}$

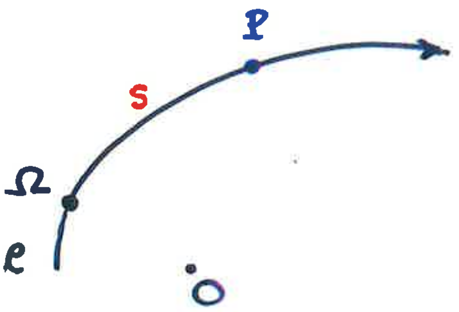
$$\boxed{d\vec{u}(t) := \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)dt}\quad ,\ t \in I$$

incremento di $\vec{u}$

$t \to t + dt$

APPLICAZIONI ALLE CURVE

Sia e una curva di $\mathcal{E}$ ed Ω un punto fisso di e. Scelto su e un verso (quello degli archi crescenti) ad ogni punto $P \in \mathcal{E}$ $(\in e)$ è possibile associare un parametro s detto ascissa curvilinea (distanza di P da Ω su e).

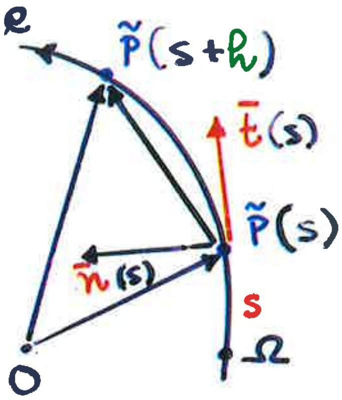


In $Ox_1x_2x_3$ l'eq. parametrica vettoriale di e è un'applicazione continua $\tilde{P} : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{E}$

$$x_i = \tilde{x}_i(s) \quad , \text{ se } I$$

Se e è sufficientemente regolare:

$$\frac{d}{ds}[\tilde{P}(s) - O] = \lim_{h \to 0} \frac{\tilde{P}(s+h) - \tilde{P}(s)}{h} := \vec{t}(s)$$ versore tangente in $\tilde{P}(s)$ a e.



$$[\tilde{P}(s+h) - O] - [\tilde{P}(s) - O] = \underbrace{\tilde{P}(s+h) - \tilde{P}(s)}_{\text{corda}}$$

$$|\vec{t}(s)| = \left|\frac{d}{ds}\tilde{P}(s)\right| = \lim_{h \to 0} \frac{|\tilde{P}(s+h) - \tilde{P}(s)|}{\underbrace{|h|}_{\text{arco}}} = 1$$

Poiché $|\vec{t}(s)| = 1 \Rightarrow \frac{d\vec{t}}{ds}(s) \perp \vec{t}(s)$ e quindi $\parallel$ a $\vec{n}(s)$.

$\vec{n}(s) :=$ versore normale principale a e in $\tilde{P}(s)$.

$\vec{b}(s) := \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$ versore binormale a e in $\tilde{P}(s)$.

$(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ costituiscono una terna ortonormale destra detta base di Frenet o terna intrinseca.

Il piano individuato da $\vec{t}$ e da $\vec{n}$ alla curva in $P(s)$ è detto piano osculatore.

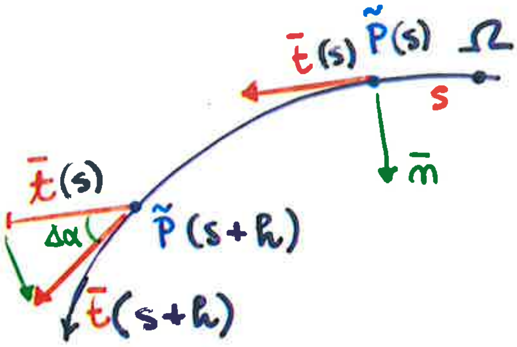
1ª FORMULA DI FRENET

Il versore $\bar{n}$ è orientato verso la concavità della curva e vale la relazione:

$$\boxed{\frac{d\vec{t}(s)}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n}}$$

dove ρ rappresenta il raggio di curvatura.

Dim.



$$\frac{d}{ds}\vec{t}(s) = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)}{h} \longrightarrow \vec{n}(s)$$

Per Carnot:

$$|\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)| = \left[\vec{t}(s)^2 + \vec{t}(s+h)^2 - 2|\vec{t}(s)||\vec{t}(s+h)|\cos\Delta\alpha\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2(1-\cos\Delta\alpha)} = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)$$

$$\left|\frac{d}{ds}\vec{t}(s)\right| = \lim_{h\to 0}\frac{|\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)|}{|h|} = \lim_{\substack{h\to 0\\ \Delta\alpha\to 0}} \underbrace{\frac{2\,\mathrm{sen}\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta\alpha}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\frac{\Delta\alpha}{|h|}}_{\downarrow\, 1/\rho} = \frac{1}{\rho}$$

Se $\mathscr{C}$ è una circonferenza $\rho \equiv R$. Infatti

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta\alpha}{|h|} = \frac{\Delta\alpha}{R\,\Delta\alpha} = \frac{1}{R}$$

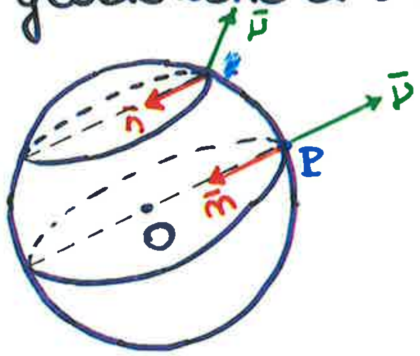
Per ogni $\tilde{P}(s)$ e $\mathscr{C}$ si può costruire una circonferenza $\in$ piano osculatore che è in grado di confondersi con $\mathscr{C}$ in un intorno di $\tilde{P}$, detta cerchio osculatore avente raggio $\equiv \rho$. Il centro di tale cerchio è detto centro di curvatura di $\mathscr{C}$ in $\tilde{P}(s)$.

Def.: Dato una superficie σ, ogni curva $\ell \in \sigma$ tale che le normale principale $\vec{n}$ a ℓ coincide con la normale $\bar{\nu}$ alla superficie σ è detta geodetica.

Il minimo arco di curva che unisce due punti abbastanza vicini di una superficie σ deve appartenere ad una geodetica.

Esempi

1) Le geodetiche di una sfera sono le circonferenze massime



Per ogni circonf. max $\vec{n} \parallel \bar{\nu}$.

Viceversa se $\forall P \in \ell$ si ha:

$$\vec{n} \times (P-O) = \bar{0}$$

$$\bar{0} = \frac{1}{\rho}\bar{n} \times (P-O) = \frac{d}{ds}\vec{t}(s) \times (P-O) =$$

$$= \frac{d}{ds}\left[\bar{t} \times (P-O)\right] - \cancel{\vec{t} \times \underbrace{\frac{dP}{ds}}_{=\vec{t}}}$$

$\Rightarrow \vec{t} \times (P-O) = \vec{c}$ con $\vec{c} \neq \vec{0}$ (se $\bar{c} = \bar{0}$ $\bar{t} \parallel P-O \Rightarrow$ curva è retta)

$$\underbrace{\vec{t} \times (P-O) \cdot (P-O)}_{=0} = \vec{c} \cdot (P-O)$$

e quindi $\vec{c} \cdot (P-O) = 0$

è l'eq. del piano passante per O e normale a $\vec{c}$.

Quindi la curva $\ell \in \sigma$, ma anche al piano passante per O pertanto è una circonferenza massima.

2) Le geodetiche di una superficie cilindrica sono le ELICHE, cioè le curve che incontrano le generatrici della sup. cilindrica sotto angoli uguali.