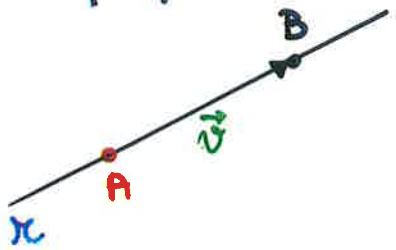
VETTORI APPLICATI

Def. Un vettore applicato è un ente caratterizzato da un punto $A \in \mathcal{E}$ e da un vettore libero $\vec{v} \in \mathbb{V}$: $(A, \vec{v})$.

Esso ha una sua localizzazione ben definita nello spazio $\mathbb{V}$: è quello tra gli infiniti vettori liberi equipollenti a $\vec{v}$ che ha come primo estremo A.



$\vec{v} = B - A$

r := retta di applicazione di $(A, \vec{v})$

Per individuare $(A, \vec{v})$ sono necessari 6 parametri : le 3 coordinate di A e le 3 componenti di $\vec{v}$.

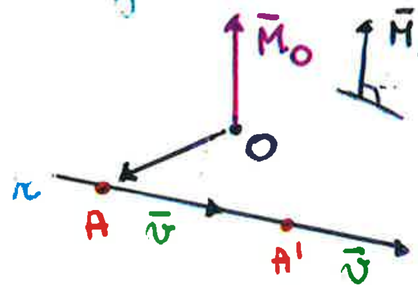
Def : Il momento di $(A, \vec{v})$ rispetto ad un polo arbitrario $O \in \mathcal{E}$ è un vettore libero :

$$\boxed{\vec{M}_O = (A - O) \times \vec{v}} \quad , \quad O \in \mathcal{E}$$

che risulta ortogonale al piano individuato da O e da $(A, \vec{v})$.

- $\vec{M}_O = \vec{0}$ se $\vec{v} = \vec{0}$
  se r passa per $O \in \mathcal{E}$ ($(A - O) \parallel \vec{v}$)

Proposizione $\vec{M}_O$ è invariante al variare di $(A, \vec{v})$ lungo la retta d'azione.



$A' \neq A \in r$

$$\vec{M}'_O = (A' - O) \times \vec{v} = (A' - A + A - O) \times \vec{v}$$
$$= \cancel{(A' - A) \times \vec{v}} + (A - O) \times \vec{v}$$
$$= \vec{M}_O$$

Def. Il momento assiale di un vett. appl. $(A, \vec{v})$ è lo scalare:

$$\boxed{M_u = (A-O) \times \vec{v} \cdot \vec{u}}$$

$\vec{u}$ versore della retta u

$O \in u$.

- $M_u = 0$ se $\vec{v} = \vec{0}$
  se $(A, \vec{v})$ e $\vec{u}$ sono complanari

Proposizione: M_u è indipendente dal polo $O \in \mathcal{E}$. ($O \in u$)

$$\vec{M}_O \cdot \vec{u} = M_u = (A-O) \times \vec{v} \cdot \vec{u} = (A - O' + O' - O) \times \vec{v} \cdot \vec{u} \qquad O' \in u$$

$$= (A-O') \times \vec{v} \cdot \vec{u} + \cancel{(O'-O) \times \vec{v} \cdot \vec{u}}$$

$$= \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u}$$

SISTEMI DI VETTORI APPLICATI

$\Sigma_a : (A_i, \vec{v}_i) \quad i = 1, \dots, n$ (con n finito)

Def: Chiamiamo (il) risultante di un Σ_a il vettore libero:

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i}$$

Chiamiamo momento risultante di un Σ_a rispetto ad un polo arbitrario $O \in \mathcal{E}$ il vettore libero:

$$\boxed{\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} (A_i - O) \times \vec{v}_i} \quad , \ O \in \mathcal{E}$$

che è invariante al variare di $(A_i, \vec{v}_i)$ lungo le rette r_i.

Chiamiamo momento assiale risultante di un Σ_a lo scalare:

$$\boxed{M_u = \sum_{i=1}^{n} (A_i - O) \times \vec{v}_i \cdot \vec{u}} \quad , O \in u$$

che è indipendente dal polo $O \in \mathcal{E}$. ($O \in u$)

LEGGE DI VARIAZIONE DEL MOMENTO RISULTANTE

Rispetto ad un qualunque polo $O' \in \mathcal{E}$, $O' \neq O$ si ha:

$$\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O + \bar{R} \times (O' - O)$$

$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} (A_i - O') \times \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (A_i - O + O - O') \times \bar{v}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (A_i - O) \times \bar{v}_i + \sum_{i=1}^{n} (O - O') \times \bar{v}_i =$$

$$= \bar{M}_O + (O - O') \times \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i = \bar{M}_O + \bar{R} \times (O' - O).$$

Proposizione Il momento risultante di un Σ_a è indipendente dal polo $O \in \mathcal{E}$ se e solo se $\vec{R} = \vec{O}$.

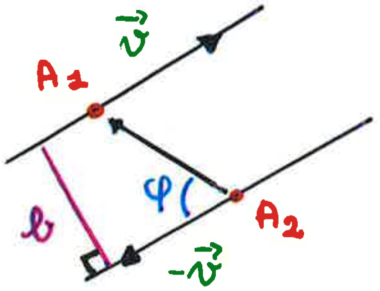
- se $\bar{R} = \bar{O}$ dalla l.v.m. $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O \quad \forall\, O, O' \in \mathcal{E}$
- se $\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O$ dalla l.v.m. $\bar{R} \times (O' - O) = \bar{O} \quad \forall\, O, O' \in \mathcal{E}$

  e questo implica $\bar{R} = \bar{O}$.

Allora $\vec{M}_O$ è detto campo uniforme.

- Il risultante $\vec{R}$ ed il momento risultante $\bar{M}_O$ sono detti vettori caratteristici di un Σ_a rispetto ad un polo $O \in \mathcal{E}$.

Def. Chiamiamo coppia un Σ_a formato da 2 vettori paralleli di ugual modulo e verso opposto.



$\bar{R} = \bar{O} \Rightarrow \bar{M}_O$ è indipendente dal polo

$O \equiv A_2$

$$\bar{M}_O = \bar{M}_{A_2} = (A_1 - A_2) \times \bar{v} = \overline{A_1A_2}\, v \operatorname{sen}\varphi\ \bar{k}$$
$$= v\, b\, \bar{k}$$

b= braccio

Def: Due sistemi Σ_a, Σ_a' si dicono equivalenti se hanno lo stesso risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo $O \in \mathcal{E}$, cioè:

$$\vec{R}' = \vec{R} \quad e \quad \vec{M}_O = \vec{M}_O' \quad , O \in \mathcal{E}$$

Proposizione Se Σ_a, Σ_a' sono equivalenti ($\Sigma_a \approx \Sigma_a'$)

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_{O'}' \quad \forall\, O' \in \mathcal{E}$$

cioè hanno lo stesso mom. risultante rispetto ad ogni altro polo $O' \in \mathcal{E}$.

Σ_a : $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{R} \times (O' - O)$

Σ_a' : $\vec{M}_{O'}' = \vec{M}_O' + \vec{R}' \times (O' - O)$

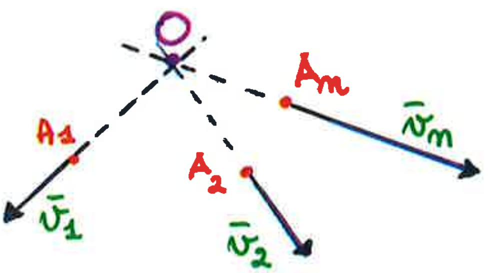
ma $\vec{R} = \vec{R}'$ e $\vec{M}_O = \vec{M}_O'$ $\Rightarrow$ $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_{O'}'$ $\forall\, O' \in \mathcal{E}$.

Def: Un sistema Σ_a si dice equivalente a zero se $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}$.

es: coppia di braccio nullo.

Teorema di Varignon

Ogni sistema Σ_a di vett. appl. incidenti (o concorrenti) in un punto $O \in \mathcal{E}$ è equivalente ad un unico vettore applicato in O, detto la risultante di Σ_a.



$(A_i, \vec{v}_i) \quad i = 1, \dots, n$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \quad ; \quad \vec{M}_O \equiv \vec{0}$$

Poiché il momento non cambia se i vettori variano lungo la loro retta d'azione, $(A_i, \vec{v}_i)$ possono essere tutti applicati in O. $\Rightarrow$ $\boxed{\Sigma_a \approx (O, \vec{R})}$

Teorema Dato un sistema Σ_a con $\bar{R} \neq \bar{0}$, il luogo dei punti $O' \in \mathcal{E}_3$ tali che il momento risultante $\vec{M}_{O'}$ è parallelo ad $\bar{R}$ oppure nullo è costituito da una retta parallela ad $\vec{R}$, detta asse centrale.

Dim: la condizione di parallelismo è espressa dall'annullarsi del prodotto vettoriale.

$$\bar{0} = \bar{M}_{O'} \times \bar{R} = [\bar{M}_O + \bar{R} \times (O'-O)] \times \bar{R} = \bar{M}_O \times \bar{R} + [\bar{R} \times (O'-O)] \times \bar{R}$$

$$= \bar{M}_O \times \bar{R} + R^2 (O'-O) - [(O'-O) \cdot \bar{R}]\, \bar{R}$$

da cui:

$$O'-O = \frac{(O'-O) \cdot \bar{R}}{R^2}\, \bar{R} + \frac{\bar{R} \times \bar{M}_O}{R^2} = \lambda(O')\, \bar{R} + \frac{\bar{R} \times \bar{M}_O}{R^2}$$

$$\boxed{O'-O = \frac{\bar{R} \times \bar{M}_O}{R^2} + \lambda(O')\, \bar{R}}$$

equazione dell'asse centrale

Poichè $\bar{M}_{O'}$ ed $\bar{R}$ sono fissati, i punti $O' \in \mathcal{E}_3$ tali che $\bar{M}_{O'} \parallel \bar{R}$ appartengono ad una retta (che si può dimostrare essere unica). Tale retta è parallela ad $\bar{R}$.

Infatti presi $O_1', O_2' \in$ retta

$$O_1'-O = \frac{\bar{R} \times \bar{M}_O}{R^2} + \lambda(O_1')\, \bar{R}$$

$$O_2'-O = \frac{\bar{R} \times \bar{M}_O}{R^2} + \lambda(O_2')\, \bar{R}$$

sottraendo membro a membro:

$$O_2' - O_1' = \underbrace{[\lambda(O_2') - \lambda(O_1')]}_{\lambda}\, \vec{R}$$

Def: Chiamiamo invariante scalare di un sistema Σ_a lo scalare:

$$\boxed{I = \vec{R} \cdot \vec{M}_O} \quad , O \in \mathcal{E}_3$$

con $\bar{R}$, $\bar{M}_O$ risultante e mom. risultante, rispetto ad un polo $O \in \mathcal{E}_3$, di Σ_a.

Osservazione: I è indipendente dal polo.

Dato $O' \neq O \in \mathcal{E}_3$

$$I' = \bar{M}_{O'} \cdot \bar{R} = [\bar{M}_O + \bar{R} \times (O'-O)] \cdot \bar{R} = \bar{M}_O \cdot \bar{R} + \cancel{\bar{R} \times (O'-O) \cdot \bar{R}}$$

$$= \bar{M}_O \cdot \bar{R} = I .$$

da ciò il nome invariante.

Proposizione Dato un sistema Σ_a di $\bar{R}$, $\bar{M}_O$ si ha che $\bar{M}_O$ è invariante nella direzione di $\bar{R}$.

Per ipotesi $\bar{R} \neq \bar{0}$. e $\bar{M}_O = \bar{M}_{O1} + \vec{M}_{O2}$ dove

$\bar{M}_{O1} \parallel \bar{R} \implies \bar{M}_{O1} = \lambda_O \bar{R}$

$\bar{M}_{O2} \perp \bar{R} \implies \bar{M}_{O2} \cdot \bar{R} = 0$

Dalla def. di invariante:

$$I = \bar{M}_O \cdot \bar{R} = \bar{M}_{O1} \cdot \bar{R} + \cancel{\bar{M}_{O2} \cdot \bar{R}} = \lambda_O \bar{R} \cdot \bar{R} = \lambda_O R^2$$

$\implies \cancel{\lambda_O} = \dfrac{I}{R^2}$ indipendente da O.

$$\implies \boxed{\bar{M}_{O1}} = \cancel{\lambda_O} \bar{R} = \frac{I}{R^2} \bar{R} = \frac{I}{R} \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \boxed{\frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{R} \bar{u}_R}$$

quindi:

$$\vec{M}_O = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{R^2} \bar{R} + \vec{M}_{O2}$$

è l'unico che cambia al variare del polo.

$$|\bar{M}_O| = \sqrt{\left(\frac{I}{R}\right)^2 + (M_{O2})^2} \geq \frac{I}{R}$$

Poichè i punti dell'asse centrale son quelli per cui il momento se non è nullo, è parallelo ad $\bar{R}$, per essi

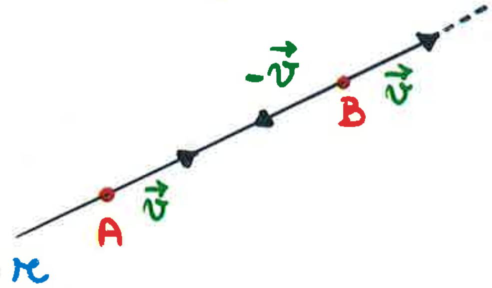
$$\bar{M}_{O'_2} \equiv \bar{0} \qquad e \qquad \bar{M}_{O'} = \frac{I}{R^2}\,\bar{R}$$

il cui modulo $|\bar{M}_{O'}| = \left|\frac{I}{R}\right|$ è minimo.

OPERAZIONI ELEMENTARI

Chiamiamo operazioni elementari su un sistema Σ_a:

1) aggiunta o soppressione di una o più coppie di braccio nullo,
2) sostituzione di un sistema Σ_a di v.a. incidenti nello stesso punto con la risultante applicata nello stesso punto e viceversa,
3) trasporto di un vettore lungo la propria retta d'azione.



(conseguenza di 1))

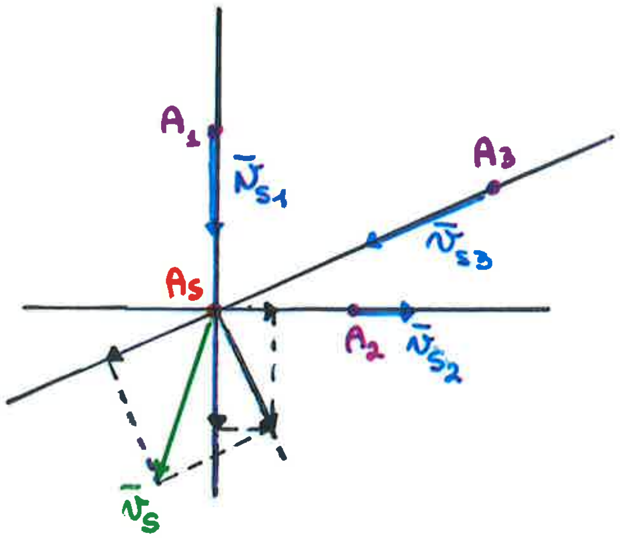
- $(A,\vec{v})$ + coppia $b=0$ $\{(B,\vec{v}),(B,-\vec{v})\}$
- soppressione della coppia $b=0$ $\{(A,\vec{v}),(B,-\vec{v})\}$

Proposizione: Due sistemi Σ_a, Σ'_a sono equivalenti se e solo se si può passare da Σ_a a Σ'_a e viceversa con sole operazioni elementari.

La dimostrazione segue dalle dimostrazioni di 3 lemmi (via grafica).

Osservazione: le operazioni elementari non alterano il risultante e il momento risultante.

Lemma 1 Un sistema Σ'_a è sempre riducibile a 3 vettori applicati in 3 punti fissati ad arbitrio e non allineati.



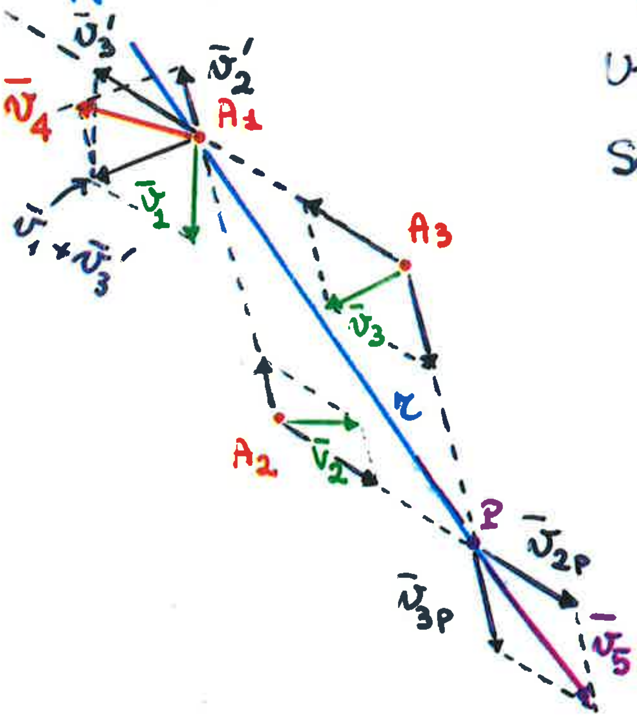
$\Sigma'_a : (A_s, \bar{v}_s) \quad s = 1, \dots, n$

Tramite operazioni elementari, ogni $\bar{v}_s$ è decomposto in 3 componenti su A_1A_s, A_2A_s, A_3A_s e poi trasportato: $(A_1, \bar{v}_{s1})$, $(A_2, \bar{v}_{s2})$, $(A_3, \bar{v}_{s3})$ $\forall$

Sommando in s si otterrà:

$(A_1, \underline{v}_1)$; $(A_2, \underline{v}_2)$; $(A_3, \underline{v}_3)$

Lemma 2 Un sistema Σ'_a è sempre riducibile a 2 vettori applicati di cui uno applicato in un punto prefissato.



Utilizzando il L1 $\Sigma_a \approx 3$ v.a.

Sia π_1 piano contenente il punto A_1 e il vettore $(A_2, \bar{v}_2)$

π_2 piano contenente il punto A_1 e il vettore $(A_3, \bar{v}_3)$

$\pi_1 \cap \pi_2 = r$

Su r scegliamo un punto P

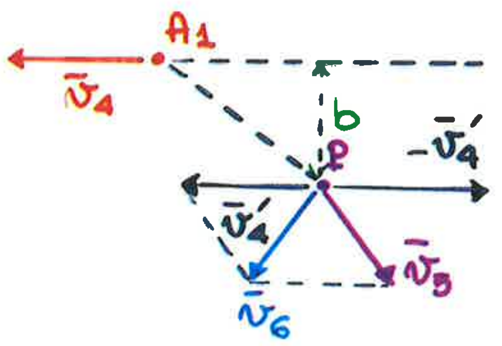
Scomponiamo $\bar{v}_2$ su A_1A_2 e A_2P e trasportiamo le componenti in A_1 e P

Scomponiamo $\bar{v}_3$ su A_1A_3 e A_3P e trasportiamo le componenti in A_1 e P.

In P sommiamo $(P, \bar{v}_{2P})$ e $(P, \bar{v}_{3P}) \Rightarrow (P, \bar{v}_5)$

In A_1 sommiamo $(A_1, \bar{v}_1)$, $(A_1, \bar{v}_2')$, $(A_1, \bar{v}_3') \Rightarrow (A_1, \bar{v}_4)$.

Lemma 3 Un sistema Σ_a è sempre riducibile ad un vettore applicato in un punto fissato ad arbitrio più una coppia.



Utilizzando le L2 $\Sigma_a \simeq 2$ v.a.

Aggiungiamo la coppia di braccio nullo $(P, \bar{v}_4') + (P, -\bar{v}_4')$ $v_4' = v_4$

Otteniamo così il vettore applicato $(P, \bar{v}_6)$ + coppia $(A_1, \bar{v}_4) + (P, -\bar{v}_4)$ di momento $\bar{M} = b v_4 \bar{k}$

TEOREMI DI RIDUZIONE

La riduzione di un generico sistema Σ_a ad un sistema costituito da un vettore applicato in un punto prefissato detto polo di riduzione e da una coppia è la riducibilità più espressiva tra quelle possibili.

La definizione di equivalenza tra sistemi Σ_a, Σ_a' (cioè $\bar{R} = \bar{R}'$, $\bar{M}_o = \bar{M}_o'$) e la dimostrazione della equivalenza utilizzando le sole operazioni elementari (L1, L2, L3) permette di ridurre un generico Σ_a ad un vettore applicato + una coppia

Dato Σ_a con $\bar{R} \neq \bar{0}$, il momento $\bar{M}_o$ dipende dalla scelta del polo O.

Problema: Esiste una scelta ottimale per il polo in modo che la riduzione di un sistema Σ_a di vettori applicati sia la più semplice possibile?

Abbiamo già visto che i punti appartenenti all'asse centrale godono della proprietà che $\bar{M}_O \parallel \bar{R}$ (se non è nullo) ed inoltre il modulo $|\bar{M}_O|$ risulta minimo perciò essi sono i poli più convenienti per ridurre Σ_a

Le riduzioni possibili sono:

- un solo vettore applicato
- una coppia
- un vettore applicato + una coppia di momento minimo

Teorema 1 Se un sistema Σ_a ha invariante $I = 0$ allora Σ_a è equivalente ad un vettore applicato in un pto $\in$ A.C. oppure ad una coppia.

Dim: Distinguiamo due casi:

1) $\bar{R} \neq \bar{0} \Rightarrow$ scelto come polo un punto $O \in$ asse centrale (a.c. $\exists$ perchè $\bar{R} \neq \bar{0}$) allora necessariamente

$$\boxed{\bar{M}_O = \bar{0}}$$

Infatti se $\bar{M}_O \neq \bar{0}$ sarebbe $\bar{M}_O \parallel \bar{R} \Rightarrow I = \bar{M}_O \cdot \bar{R} \neq 0$ ↯

Quindi $\Sigma_a \simeq (O, \bar{R})$ con $O \in$ a.c.

Osservazione

Per poli $O' \notin$ a.c. $\bar{M}_{O'} \neq \bar{0}$ e poichè $I = 0$ dovrà essere $\bar{R} \perp \bar{M}_{O'}$. In tal caso Σ_a è equivalente al vettore applicato $(O', \bar{R})$ + coppia di momento $\bar{M}_{O'}$, ma questo non è la massima riduzione possibile per Σ_a.

Da ciò l'importanza di determinare l'asse centrale.

2) $\bar{R}=\bar{0}$ $\Rightarrow$ il momento $\bar{M}_O$ non dipende dal polo O

$\Sigma_a \simeq$ coppia di momento $\bar{M}_O$

Osservazione

Se poi anche $\bar{M}_O=\bar{0}$ allora

$\Sigma_a \simeq$ zero (coppia di braccio nullo)

Teorema 2 Se un sistema Σ_a ha invariante $I \neq 0$ allora Σ_a è equivalente ad un vettore applicato + una coppia di momento minimo se il polo scelto appartiene all'asse centrale.

Dim: Dato Σ_a con $\bar{R}\neq\bar{0}$, $\bar{M}_O\neq\bar{0}$ e $O\in a.c.$

Sia Σ_a' un sistema costituito da un vettore applicato $(O,\bar{R})$ + una coppia di momento $\bar{M}_O$, $O\in a.c.$, si può dimostrare che $\Sigma_a \simeq \Sigma_a'$. ∎

Def: Un sistema Σ_a è detto piano se le rette di applicazione dei v.a. $(A_i,\bar{v}_i)$ appartengono ad uno stesso piano π;

Proposizione Un sistema Σ_π ha invariante $I=0$.

Poiché $\forall i=1,\dots,m$ $(A_i,\bar{v}_i)\in\pi \Rightarrow \bar{R}\in\pi$

e se $O\in\pi \Rightarrow \bar{M}_O \perp \pi$

quindi $\bar{M}_O \perp \bar{R} \Rightarrow I=0$.

Allora Σ_π è equivalente:

1) se $\bar{R}\neq\bar{0}$ ad un v.a. $(O,\bar{R})$ con $O\in a.c.$

perché $\bar{M}_O=\bar{0}$. massima riduzione

2) se $\bar{R} = \bar{0}$ ad una coppia di momento $\bar{M}_0$

3) se $\bar{R} = \bar{0}$, $\bar{M}_0 = \bar{0}$ a zero. (coppia di braccio nullo). ■

Def: Un sistema Σ'_a è detto parallelo se le rette di applicazione dei v.a. $(A_i, \bar{v}_i)$ hanno la stessa direzione.

Proposizione Un sistema Σ_p ha invariante $I = 0$.

Sia $\bar{u}$ la direzione comune dei v.a. $(A_i, \bar{v}_i)$ allora

$$\forall i \quad \bar{v}_i = v_i \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \bar{R} = \sum_{i=1}^{m} \bar{v}_i = \left(\sum_{i=1}^{m} v_i \right) \bar{u}$$

Scelto un polo qualunque O :

$$\bar{M}_0 \doteq \sum_{i=1}^{m} (A_i - O) \times \bar{v}_i = \left[\sum_{i=1}^{m} (A_i - O) v_i \right] \times \bar{u} \neq \bar{0} \text{ in generale}$$

$$I = \bar{M}_0 \cdot \bar{R} = \left[\sum_{i=1}^{m} (A_i - O) v_i \right] \times \underline{\bar{u}} \cdot \left(\sum_{i=1} v_i \right) \underline{\bar{u}} \equiv 0$$

Infatti $\bar{M}_0 \perp \bar{u} \Rightarrow \bar{M}_0 \perp \bar{R}$.

Allora Σ_p è equivalente:

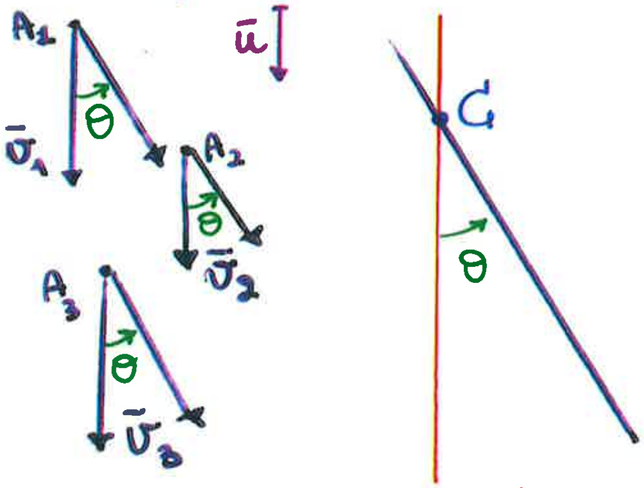
1) se $\bar{R} \neq \bar{0}$ ad un v.a. $(O', \bar{R})$ con $O' \in$ a.c.

$\Rightarrow \bar{M}_{O'} = \bar{0}$. massima riduzione

2) se $\bar{R} = \bar{0}$ ad una coppia

3) se $\bar{R} = \bar{0}$, $\bar{M}_0 = \bar{0}$ a zero. ■

Dato un sistema Σ_p di v.a. paralleli e concordi segue che $\underline{\bar{R} \neq \bar{0}}$ <u>sempre</u>. Quindi esiste l'asse centrale. Se ruotiamo tutti i v.a. di uno stesso angolo θ, anche l'a.c. ruota dello stesso angolo mantenendo però fisso un punto C detto CENTRO indipendente dalla direzione comune $\vec{u}$.



asse centrale

Poiché $\bar{R} \neq \bar{0}$ $\quad \Sigma_p \cong (O', \vec{R})$

con $O' \in$ a.c. e $\bar{M}_{O'} = \bar{0}$.

Se C esiste $\Rightarrow \bar{M}_C = \bar{0} \quad \forall \bar{u}$

$$\bar{M}_C = \sum_{i=1}^{m} (A_i - C) \times \bar{v}_i = \left[\sum_{i=1}^{m} (A_i - C) v_i \right] \times \bar{u} = \bar{0} \quad , \forall \bar{u}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} v_i (A_i - C) = \bar{0} \quad , \forall \bar{u}$$

$$\bar{0} = \sum_{i=1}^{m} v_i (A_i - O + O - C) = \sum_{i=1}^{m} v_i (A_i - O) + (O - C) \sum_{i=1}^{m} v_i$$

da cui si ottiene

$$\boxed{C - O = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i (A_i - O)}{\sum_{i=1}^{m} v_i}}$$

CENTRO DI UN Σ_p e concordi

indipendente da $\vec{u}$

Esempio:

Se $\bar{v}_i = m_i \bar{g} = m_i g \vec{e}_3$ forze peso di (P_i, m_i)

$\bar{e}_3 \downarrow$

$$G - O = \frac{\sum_i m_i \cancel{g} (A_i - O)}{\sum_i m_i \cancel{g}} = \frac{\sum_i m_i (A_i - O)}{M}$$

$\rightarrow$ è il centro di massa