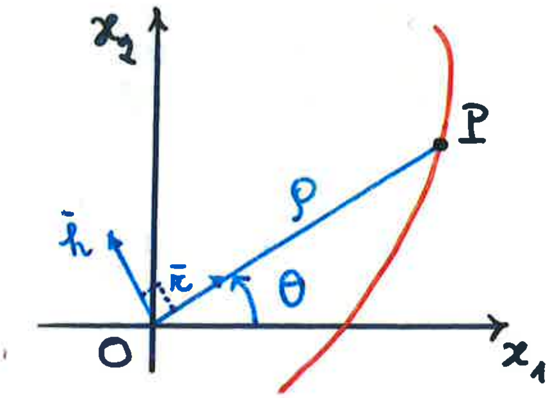
MOTI PIANI

Se il moto di un punto P avviene in un piano lo si può descrivere in coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x_1 = \hat{x}_1(t) \\ x_2 = \hat{x}_2(t) \end{cases}$$

o in coordinate polari (ρ, θ) chiamate raggio vettore e anomalia:

$$\begin{cases} \rho = \hat{\rho}(t) \\ \theta = \hat{\theta}(t) \end{cases}$$



$\rho = \hat{\rho}(\theta)$ equazione polare della traiettoria (eliminando t)

$$P - O = \rho\, \vec{r}(\theta)$$

$$\bar{v} = \frac{d}{dt}(P-O) = \dot{\rho}\,\vec{r} + \rho \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{r} + \rho\,\dot{\theta}\,\frac{d\bar{r}}{d\theta}$$

$$\begin{cases} \bar{r} = \cos\theta\, \bar{i}_1 + \operatorname{sen}\theta\, \bar{i}_2 \\ \bar{h} = -\operatorname{sen}\theta\, \bar{i}_1 + \cos\theta\, \bar{i}_2 \end{cases}$$

derivando rispetto a θ:

$$\frac{d\bar{r}}{d\theta} = \bar{h} \quad \text{e} \quad \frac{d\bar{h}}{d\theta} = -\vec{r}$$

e quindi:

$$\boxed{\bar{v} = \dot{\rho}\,\bar{r} + \rho\,\dot{\theta}\,\bar{h}}$$

velocità in coordinate polari

Osservazioni

1) la velocità di P in coordinate polari ha due componenti:

$\boxed{\bar{v}_\rho = \dot{\rho}\,\bar{r}}$ detta velocità radiale

$\boxed{\bar{v}_\theta = \rho\,\dot{\theta}\,\bar{h}}$ detta velocità trasversa

2) poiché $\bar{v}_\rho$ e $\bar{v}_\theta$ sono tra loro ortogonali, il modulo della velocità è:

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2}$$

Derivando l'espressione della velocità in coordinat polari si ottiene:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \ddot{\rho}\,\bar{r} + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\overset{\vec{h}}{\overset{\shortparallel}{\frac{d\bar{r}}{d\theta}}} + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\bar{h} + \rho\,\ddot{\theta}\,\bar{h} + \rho\,\dot{\theta}^2\overset{-\vec{r}}{\overset{\shortparallel}{\frac{d\bar{h}}{d\theta}}}$$

e quindi:

$$\boxed{\bar{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\bar{r} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\,\bar{h}}$$

accelerazio in coord. polar

- $\boxed{\bar{a}_\rho = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\bar{r}}$ è detto accel. radiale
- $\boxed{\bar{a}_\theta = (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\,\bar{h}}$ è detto accel. trasversa

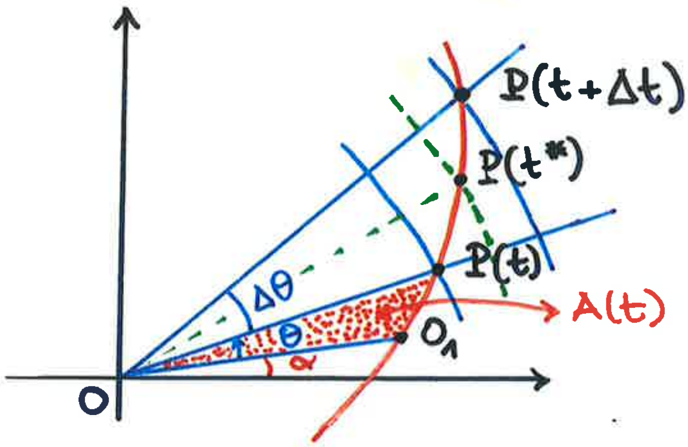
poiché

$$\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = \frac{1}{\rho}(\rho^2\ddot{\theta} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})$$

$$\boxed{\bar{a}_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\,\bar{h}}$$

N.B.: non confondere le componenti radiale e trasversa con quelle tangenziale e normale per l'accelerazione.

VELOCITÀ AREALE



Fissato un punto O_1 sulla traiettoria, $A(t)$ è l'area spazzata dal raggio vettore $(P-O)$.

Def. Chiamiamo velocità areale $\dot{A}$ del punto P rispetto al polo O la derivata temporale della funzione $A(t)$.

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta \theta} \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

tra l'istante t e $t+\Delta t$ l'area è:

$\Delta A = \frac{1}{2} \rho^2(t^*) \Delta \theta$ settore circolare di apertura $\Delta\theta$ e raggio $\rho(t^*)$

con $t^* \in [t, t+\Delta t]$ e $\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{A}(t) = \frac{1}{2} \rho^2(t)\, \dot{\theta}(t)}$$

In coordinate cartesiane :

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta \\ x_2 = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\rho}\cos\theta - \rho\,\mathrm{sen}\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{x}_2 = \dot{\rho}\,\mathrm{sen}\theta + \rho\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 &= \rho\dot{\rho}\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta + \rho^2\cos^2\theta\,\dot{\theta} - \\ &\quad \rho\dot{\rho}\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta + \rho^2\mathrm{sen}^2\theta\,\dot{\theta} \\ &= \rho^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

quindi la velocità areale diventa

$$\boxed{\dot{A} = \frac{1}{2}\left(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1\right)}$$

MOTI CENTRALI

Def. Il moto di un punto P è detto centrale se il vettore accelerazione è sempre diretto come il vettore $P-O$, essendo O un punto fisso detto centro del moto.

Teorema: Ogni moto centrale rispetto ad un centro O è piano e la velocità areale rispetto ad O è costante e viceversa.

Dim: Se il moto è centrale $\Rightarrow \bar{a} \parallel (P-O)$ e

$$\bar{a}(t) \times [P(t)-O] = \bar{0} \qquad \forall t$$

$$\bar{0} = \frac{d}{dt}\bar{v}(t) \times [P(t)-O] = \frac{d}{dt}\left[\bar{v}(t) \times (P(t)-O)\right] - \underset{\overset{\parallel}{\bar{0}}}{\bar{v}(t) \times \bar{v}(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{v}(t) \times [P(t)-O] = \bar{k}} \quad \text{vettore costante}$$

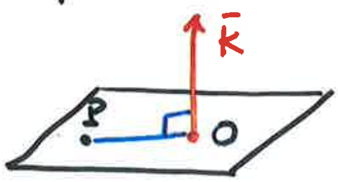
- $\bar{k} = \bar{0}$ $\qquad \bar{v}(t) \parallel (P-O)$, $\quad \bar{v}(t) \parallel \bar{a}(t) \quad \forall t$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\rho}\dot{s}^2 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \dot{s} = 0 & P \text{ è in quiete} \\ \frac{1}{\rho} = 0 & \text{moto rettilineo} \end{cases}$$

- $\bar{k} \neq \bar{0}$

$$\underbrace{\bar{v}(t) \times (P(t)-O) \cdot (P(t)-O)}_{=0} = \bar{k} \cdot (P(t)-O) \qquad \forall t$$

quindi P rimane nel piano passante per O e ortogonale a $\bar{k}$



$\Rightarrow$ moto centrale risulta piano.

Possiamo rappresentare il moto in coordinate polari. Poichè $\bar{a} \parallel (P-O)$ segue che $\boxed{\bar{a}_\theta = \bar{0}}$ cioè:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho^2\dot{\theta} = c$$

da cui

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{c}{2} \qquad c = \text{costante delle aree}$$

Viceversa, se per un moto piano $\dot{A}$ = costante allora il moto è centrale. Infatti da $\dot{A} = \frac{c}{2}$ segue $\bar{a}_\theta = \bar{0}$ e quindi $\bar{a} = \bar{a}_\rho$ risulta sempre diretta verso O.

Teorema (formula di Binet) (no)

In un moto centrale con costante delle aree c assegnata, l'accelerazione $\bar{a}$ si può determinare mediante la sola traiettoria del punto $\rho = \hat{\rho}(\theta)$ tramite la formula:

$$\boxed{\bar{a} = -\frac{c^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right]\bar{\imath}}$$

Dim: nota $\rho = \hat{\rho}(\theta)$, se il moto è centrale $\rho^2\dot{\theta} = c$ e

$$\bar{a} = \bar{a}_\rho = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\bar{\imath}$$

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{c}{\rho^2} = -c\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\begin{cases} \ddot{\rho} = -c\,\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{1}{\rho}\right)\cdot \underbrace{\dfrac{d\theta}{dt}}_{= \dot{\theta} = \frac{c}{\rho^2}} = -\dfrac{c^2}{\rho^2}\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) \\ -\rho\dot{\theta}^2 = -\dfrac{c^2}{\rho^3} \end{cases}$$

sostituendo nell'espressione di $\bar{a}_p$ si ottiene la tesi. ■

<u>Def.</u> Il moto di un punto P è detto uniformemente vario se l'accelerazione tangenziale è costante in modulo, cioè $\ddot{s}(t) = a_0$.

La legge oraria per tale moto è:

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0$$

dove s_0, v_0 sono l'ascissa curvilinea e la velocità scalare all'istante $t = 0$.

Graficamente rappresenta una parabola con concavità rivolta verso l'alto (basso) se $a_0 > 0$ (< 0).

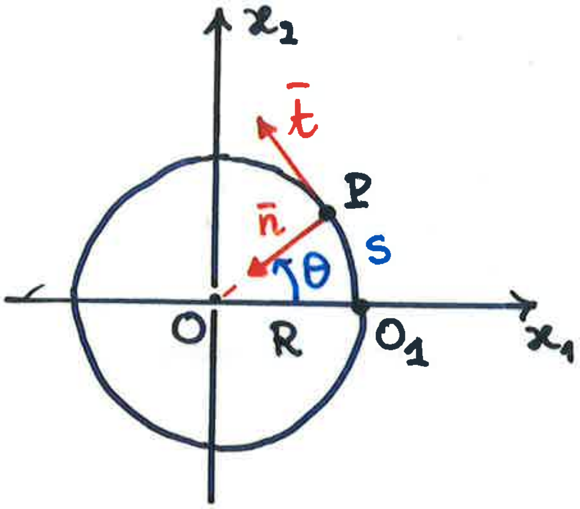
<u>Def.</u> Il moto di un punto P è detto periodico di periodo T se la legge oraria è una funzione periodica in t, di periodo T, cioè se:

$$\hat{s}(t + T) = \hat{s}(t) \qquad \forall t$$

In un moto periodico la velocità e l'accelerazione scalare (componente tangenziale di $\bar{a}$: $\ddot{s}$) sono funzioni periodiche in t.

MOTO CIRCOLARE ED UNIFORM

Def: Il moto di un punto P è detto circolare se la sua traiettoria è una circonferenza o un suo arco; quando la velocità scalare $\dot{s}$ è costante, il moto è detto circolare ed uniforme.



s: ascissa curvilinea $\in [0, 2\pi R)$

$s = R\theta$

$s = \hat{s}(t)$ legge oraria

$\bar{n} = -\operatorname{vers}(P-O) = -\dfrac{(P-O)}{R}$

$\bar{v} = \dot{s}\,\bar{t}$

$$\bar{a} = \ddot{s}\,\bar{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\bar{n} = \underbrace{\ddot{s}}_{R\ddot{\theta}}\,\bar{t} - \underbrace{\boxed{\frac{\dot{s}^2}{R^2}}}_{\dot{\theta}^2}(P-O)$$

Teorema: Il moto circolare ed uniforme è un moto periodico di periodo:

$$T = \frac{2\pi R}{v_0}$$

e l'accelerazione è tutta centripeta:

$$\bar{a} = -\omega^2(P-O)$$

dove $\omega = v_0/R$.

Dim. Poichè $s(t) = R\theta(t)$, $\dot{s} = R\dot{\theta}$ essendo $\dot{s} = \text{cost}$.

$\Rightarrow \dot{\theta} = \text{cost} = \omega$ detta pulsazione.

$$\omega = \frac{\dot{s}}{R} = \frac{\dot{s}(0)}{R} = \frac{v_0}{R} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}(t) = \omega t + \theta_0 \qquad \theta_0 = \theta(0)$$

Poichè $\theta\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \theta(t) \Rightarrow \hat{\theta}$ è periodica di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ $\Rightarrow$ anche $\hat{s}(t)$ è periodica con $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi R}{v_0}$.

L'inverso del periodo T:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$ frequenza

Poiché $(P-O) \perp \bar{t}$ e quindi $(P-O) \perp \vec{v}$, preso $\bar{k}$ versore normale al piano Ox_1x_2, per la divisione vettoriale si ha:

$$\bar{v} = \dot{s}\,\bar{t} = R\dot{\theta}\,\bar{t} = R\dot{\theta}\Big[\,\bar{k} \times \underbrace{\frac{(P-O)}{R}}_{=-\bar{n}}\Big] = \dot{\theta}\,\bar{k} \times (P-O)$$

cioè

$$\boxed{\bar{v} = \bar{\omega} \times (P-O)}$$

dove $\boxed{\bar{\omega} = \dot{\theta}\,\bar{k}}$ è detta velocità angolare.

Se il moto è uniforme $\ddot{s} = 0$, l'accelerazione è tutta centripeta

$$\boxed{\bar{a}} = \frac{\dot{s}^2}{R}\bar{n}\left(= \frac{v_0^2}{R}\bar{n}\right) = -\frac{\dot{s}^2}{R^2}(P-O) = -\dot{\theta}^2(P-O) = \boxed{-\omega^2(P-O)}$$

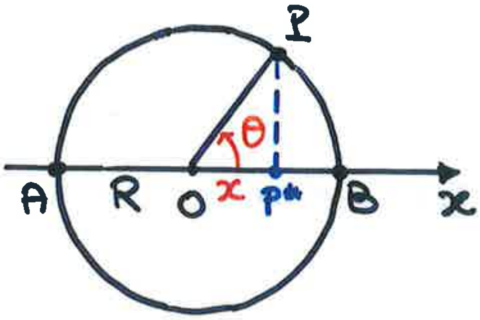
Le equazioni cartesiane del moto circolare sono:

$$x_1 = R\cos\theta \,, \quad x_2 = R\,\mathrm{sen}\,\theta \,, \quad \theta = \hat{\theta}(t).$$

Se il moto è uniforme $\hat{\theta} = \omega t + \theta_0$:

$$\begin{cases} x_1 = R\cos(\omega t + \theta_0) \\ x_2 = R\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$ moto circolare uniforme

MOTO ARMONICO



Se P si muove di moto circolare uniforme, P* si muove su AB secondo la legge:

$$x = R\cos(\dot{\theta}t + \theta_0)$$

Poiché il moto è uniforme $\dot{\theta} = \omega =$ costante

- $x = R\cos(\omega t + \theta_0)$

$$\dot{x} = -R\omega\,\text{sen}(\omega t + \theta_0)$$

$$\ddot{x} = -R\omega^2\cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x$$

Def. Un moto rettilineo è detto oscillatorio armonico se l'equazione oraria è data da:

$$s(t) = C\cos(\omega t + \gamma)$$

C, γ, ω dette rispettivamente ampiezza, fase iniziale, pulsazione.

Teorema: Ogni moto armonico di pulsazione ω (con ampiezza e fase arbitraria) soddisfa $\ddot{s} + \omega^2 s = 0$ e viceversa.

Dim. Dati A, γ ampiezza e fase iniziale di un moto armonico

$$s(t) = A\cos(\omega t + \gamma)$$

per derivazione si ottiene subito $\boxed{\ddot{s} = -\omega^2 s}$.

Viceversa $\ddot{s} + \omega^2 s = 0$ ha come equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

quindi $\lambda = \pm i\omega$, e l'integrale generale è:

$$s(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \operatorname{sen}\omega t$$

Poniamo:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

scegliamo γ:

$$\cos\gamma = \frac{C_1}{A} \quad , \quad \operatorname{sen}\gamma = -\frac{C_2}{A}$$

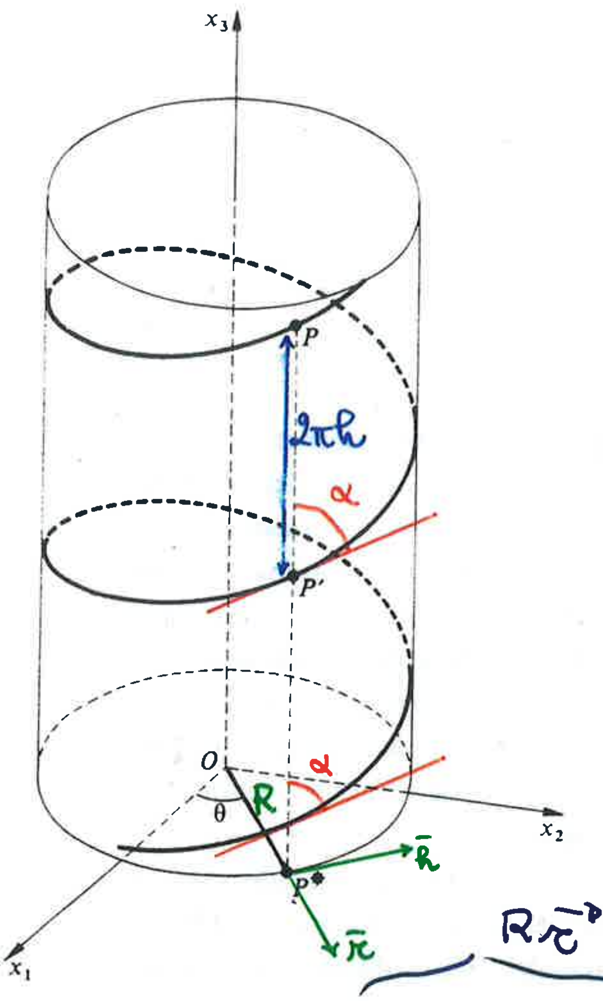
si ottiene:

$$s(t) = A(\cos\gamma \cos\omega t - \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\omega t)$$
$$= A\cos(\omega t + \gamma)$$

Osservazione

Un moto armonico di pulsazione ω ha lo stesso periodo del moto circolare ed uniforme, cioè $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$. L'ampiezza dell'oscillazione coincide con il raggio della circonferenza R e la fase iniziale coincide con $\theta_0 = \theta(0)$.

MOTO ELICOIDALE



Dato un cilindro di raggio R, chiamiamo elica circolare una curva che incontra le generatrici del cilindro sempre sotto lo stesso angolo

Def: Il moto di un punto P su una superficie cilindrica è detto elicoidale se P si muove su un' elica circolare

$$P-O = (P-P^*) + (P^*-O)$$

$$P-O = \underbrace{R\cos\theta\,\bar{\imath}_1 + R\,\mathrm{sen}\theta\,\bar{\imath}_2}_{R\vec{\tau}} + h\theta\,\bar{\imath}_3$$

dove h è un parametro tale che:

$$|P-P'| = 2\pi h \quad \text{passo dell' elica}$$

con P, P' due punti consecutivi dell' elica che stanno sulla stessa generatrice.

L'equazione della traiettoria (elica) di P:

$$x_1 = R\cos\theta \quad , \quad x_2 = R\,\mathrm{sen}\theta \quad , \quad x_3 = h\theta$$

e la legge oraria è data da $\boxed{\theta = \hat{\theta}(t)}$.

Se il moto è uniforme $\Rightarrow$ $\dot{\theta} = \text{costante} = \omega$

cioè $\theta = \omega t + \theta_0$ $\Rightarrow$ moto elicoidale ed uniforme

$$\bar{v} = \frac{d}{dt}(P-O) = \frac{d}{dt}(P-P^*) + \frac{d}{dt}(P^*-O)$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{h}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(h\theta\,\bar{\imath}_3 + R\,\bar{r}\right) = h\dot{\theta}\,\bar{\imath}_3 + R\dot{\theta}\,\bar{h} \qquad \vec{h} = \bar{\imath}_3 \times \vec{r}$$

$$= h\dot{\theta}\,\bar{\imath}_3 + \dot{\theta}\,\bar{\imath}_3 \times \underbrace{R\bar{r}} = h\dot{\theta}\,\bar{\imath}_3 + \dot{\theta}\,\bar{\imath}_3 \times (P^*-O)$$

Poniamo: $\vec{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)\,\bar{\imath}_3$

$$\boxed{\bar{v} = h\,\bar{\omega} + \bar{\omega} \times (P^*-O)}$$ velocità in un moto elicoidale

Determiniamo il versore tangente $\bar{t}$ e il versore normale principale $\bar{n}$ all' elica.

$dx_1 = -R\,\mathrm{sen}\theta\, d\theta$, $dx_2 = R\cos\theta\, d\theta$, $dx_3 = h\, d\theta$

$$ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2} = \sqrt{R^2+h^2}\, d\theta$$

$$\frac{d\theta}{ds} = (R^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\bar{t} = \frac{dP}{ds} = \frac{dP}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds} = \frac{(-R\,\mathrm{sen}\theta\,\bar{\imath}_1 + R\cos\theta\,\bar{\imath}_2 + h\,\bar{\imath}_3)}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

BINET

$$\bar{n} = \rho\frac{d\bar{t}}{ds} = \rho\frac{d\bar{t}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds} = \rho\,\frac{(-R\cos\theta\,\bar{\imath}_1 - R\,\mathrm{sen}\theta\,\bar{\imath}_2)}{(R^2+h^2)}$$

$$= -\frac{\rho R}{(R^2+h^2)}\,\bar{r} = -\rho/_{(R^2+h^2)}\cdot(P^*-O)$$

poichè $\bar{r}$ ed $\bar{n}$ hanno modulo unitario

$$\frac{\rho R}{R^2+h^2} = 1$$

cioè $$\rho = R + \frac{h^2}{R}$$

quindi

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R}{R^2+h^2}$$ la curvatura dell'elica circolare è costante

ed

$$\bar{n} = -\frac{(P^* - O)}{R} = \vec{N}$$

cioè la normale principale all'elica è parallela alla normale alla superficie del cilindro e perciò l'elica è una geodetica del cilindro.

Es. di geodetica di una sup. sferica