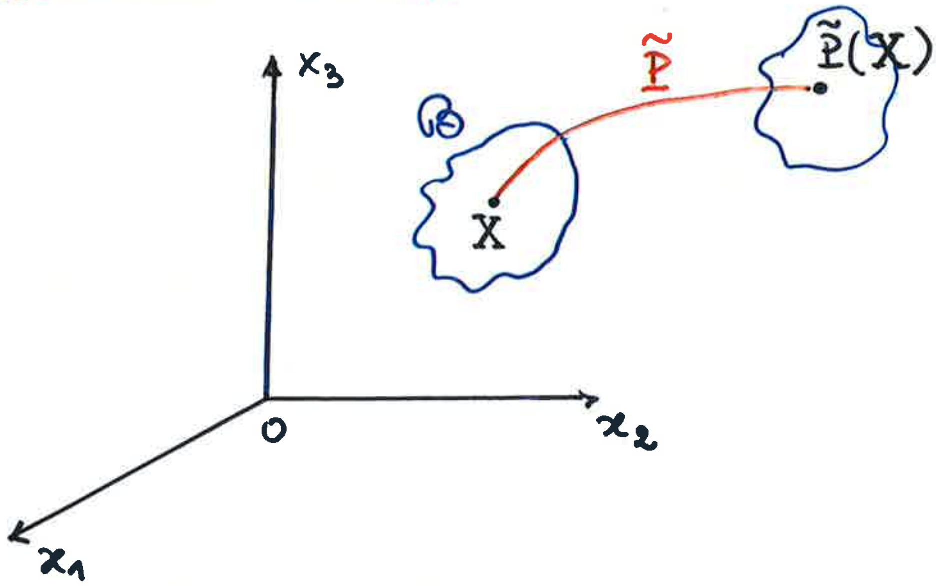
CINEMATICA DEI SISTEMI MATERIALI

Def: Chiamiamo sistema materiale $\mathcal{B}$ un insieme costituito da un numero finito o infinito di elementi $X_1, X_2, \dots$ detti punti materiali su cui è definita una famiglia $\mathcal{P}$ di applicazioni iniettive e sufficientemente regolari $\tilde{P} : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ dette localizzazioni del corpo $\mathcal{B}$.
Ogni localizzazione determina una particolare configurazione di $\mathcal{B}$ in $\mathcal{E}$.



Se i punti X_i sono liberi di assumere qualunque posizione nello spazio il sistema è detto libero.

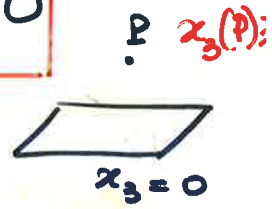
Se la famiglia $\mathcal{P}$ non è abbastanza ampia per assegnare a $\mathcal{B}$ una qualsiasi configurazione in $\mathcal{T}$, il sistema è detto vincolato.

Def: Chiamiamo vincolo ogni dispositivo che limita le posizioni e le velocità dei punti del sistema materiale, esprimibile analiticamente tramite una relazione:

$$\psi(\dots, \tilde{P}(X_i, \dots, \dot{\tilde{P}}(X_i), \dots, t) \geq 0$$

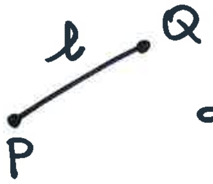
oppure

$$\boxed{\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_i, \dots, t) \geq 0}$$

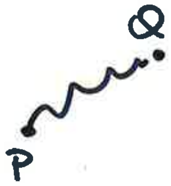


dove $\vec{x}_i = \tilde{P}(X_i) - O$.

Def: Un vincolo è detto bilaterale quando le relazioni di vincolo sono equazioni; è detto unilaterale quando nelle relazioni compare una disuguaglianza.



$d(P,Q) = l$;



$d(P,Q) \leq l$

Def: Un vincolo è detto indipendente dal tempo o scleronomo se la relazione di vincolo non contiene esplicitamente il tempo t, altrimenti il vincolo è detto dipendente dal tempo o reonomo.

p.es. Un punto vincolato ad una circonferenza di raggio variabile con il tempo $R(t)$.

$$|\tilde{P}(x) - O| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = R(t)$$

Def: Un vincolo è detto olonomo o geometrico o di posizione se limita direttamente solo le posizioni del sistema, cioè:

$$\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N; t) \geq 0$$

Un vincolo è detto anolonomo o cinematico o di mobilità se limita anche le velocità dei punti, cioè:

$$\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_N; t) \geq 0$$

Osservazione: Un vincolo olonomo limita indirettamente anche le velocità dei punti del sistema (basta derivare totalmente ψ).

$$\frac{d}{dt}\psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N; t) = \sum_{s=1}^{N} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \vec{x}_s} \dot{\vec{x}}_s \right) + \frac{\partial \psi}{\partial t} \geq 0$$

N: n° pti materiali.

Per i vincoli anolonomi e bilaterali si assume una condizione lineare nelle componenti delle velocità dei punti non integrabile:

$$\Phi \doteq \sum_{s=1}^{N} \bar{a}_s(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N; t) \cdot \dot{\vec{x}}_s + \alpha(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N; t) = 0$$

Affinché il vincolo sia anolonomo, non deve esistere una funzione $F = \hat{F}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N; t)$:

$$\frac{d}{dt} \hat{F}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N; t) = \Phi = 0$$

perchè in tal caso $\hat{F}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N; t) = \text{cost}$ che esprime un vincolo olonomo.

Def: Un sistema materiale è detto olonomo se è soggetto a soli vincoli olonomi e, in ogni istante, la sua configurazione può essere univocamente individuata tramite un numero finito n di parametri indipendenti $q_1, \dots, q_n$ chiamati coordinate lagrangiane. Il numero n è detto grado di libertà del sistema.

Esempi:

1) punto materiale libero (non soggetto a vincoli) ha 3 g. di l. : $q_i = x_i \quad i = 1, 2, 3$;
2) punto materiale vincolato ad una curva ha 1 g. di l.: $q = s$ ascissa curvilinea ;
3) punto materiale vincolato ad una superficie $\varphi(x, y, z; t) = 0$ ha 2 g. di l. (bastano 2 parametri)

Determinazione del grado di libertà

Dato un sistema mat. olonomo costituito da $\boxed{N}$ pti mat. soggetto ad $\boxed{r}$ vincoli bilaterali $(r < 3N)$

$3N$ = coordinate dei pti $P_s = (x_{1s}, x_{2s}, x_{3s})$ $s = 1, \dots, N$

r = n° equazioni indipendenti di vincolo

$$\psi_h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N; t) = 0 \qquad h = 1, \dots, r$$

allora esistono

$$n = 3N - r$$

parametri indipendenti $q_1, \dots, q_n$ tali che:

$$P_s = \hat{P}_s(q_1, \dots, q_n; t) \qquad s = 1, \dots, N$$

e la scelta non è univoca.

N.B.: I vincoli unilaterali non abbassano il grado di libertà del sistema, ma impongono solo condizioni su tali parametri del tipo:

$$\varphi(q_1, \dots, q_n; t) \geq 0$$

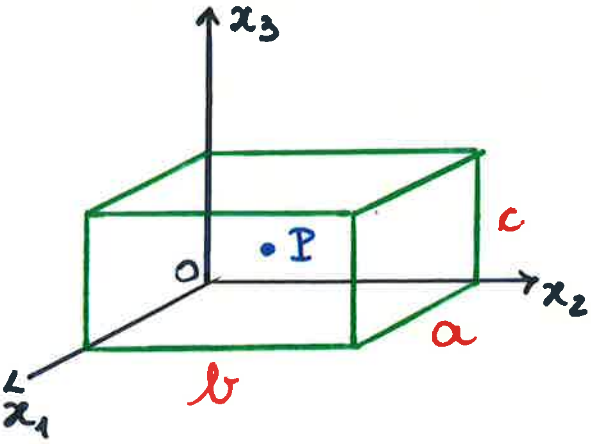
Def: Un sistema materiale è detto anolonomo se è soggetto ad almeno un vincolo anolonomo.

N.B.: La presenza di vincoli anolonomi non modifica il n° dei parametri $q_1, \dots, q_n$, cioè non preclude al sistema alcuna posizione consentita dai vincoli olonomi, ma impone delle condizioni sul modo di passare da una posizione all'altra. In funzione di coordinate lagrangiane un vincolo anolonomo si rappresenta:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(q_1,\dots,q_n;t)\,\dot{q}_i + \alpha(q_1,\dots,q_n;t)=0$$

Esempi

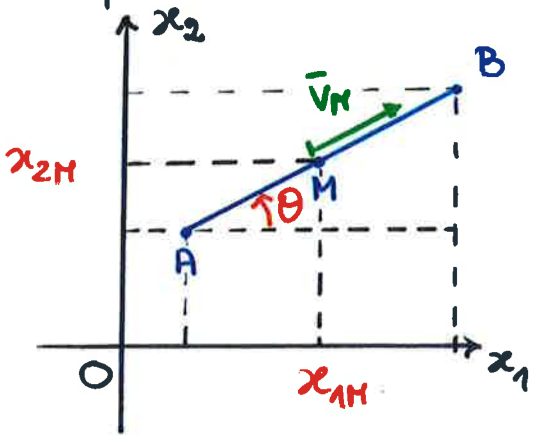
1) vincolo olonomo unilaterale : punto materiale vincolato dentro un parallelepipedo.



Per determinare la posizione di P occorrono 3 par. lagrangiani (x_1, x_2, x_3) :

$0 \le x_1 \le a$
$0 \le x_2 \le b$
$0 \le x_3 \le c$

2) vincolo anolonomo : un' asta AB, di lunghezza ℓ, mobile nel piano $O x_1 x_2$ con la condizione che il suo punto medio M abbia velocità parallela ad AB



Sistema mat. rigido con 3 g. di l. :

$q_1 = x_{1M}$; $q_2 = x_{2M}$; $q_3 = \theta$

$M(q_1, q_2) = (x_{1M}, x_{2M})$

$\boxed{\bar{V}_M} = \dot{x}_{1M}\,\bar{\imath}_1 + \dot{x}_{2M}\,\bar{\imath}_2$

$$A = \left(x_{1M} - \frac{\ell}{2}\cos\theta \,;\; x_{2M} - \frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \right)$$

$$B = \left(x_{1M} + \frac{\ell}{2}\cos\theta \,;\; x_{2M} + \frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \right)$$

$$\boxed{B-A} = \ell\cos\theta\, \bar{\imath}_1 + \ell\,\mathrm{sen}\,\theta\, \bar{\imath}_2$$

La condizione imposta dal vincolo è $\bar{v}_M \parallel (B-A)$

$\bar{v}_M = \lambda(B-A)$ che in componenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1M} = \lambda\ell\cos\theta \\ \dot{x}_{2M} = \lambda\ell\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$ divido membro a membro

$$\frac{\dot{x}_{2M}}{\dot{x}_{1M}} = \mathrm{tg}\,\theta \quad \text{ossia} \quad \boxed{\dot{x}_{2M} - \mathrm{tg}\,\theta\, \dot{x}_{1M} = 0}$$ equazione di vincolo

Questa relazione non è integrabile.

Se lo fosse dovrebbe esistere una funzione

$F = \hat{F}(x_{1M}, x_{2M}, \theta)$ tale che:

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \dot{x}_{2M} - \mathrm{tg}\,\theta\, \dot{x}_{1M} = 0$$

ma
$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{\partial\hat{F}}{\partial x_{1M}}\dot{x}_{1M} + \frac{\partial\hat{F}}{\partial x_{2M}}\dot{x}_{2M} + \frac{\partial\hat{F}}{\partial\theta}\dot{\theta}$$

da cui

$$\frac{\partial\hat{F}}{\partial x_{1M}} = -\mathrm{tg}\,\theta \;;\; \frac{\partial\hat{F}}{\partial x_{2M}} = 1 \;;\; \frac{\partial\hat{F}}{\partial\theta} = 0$$

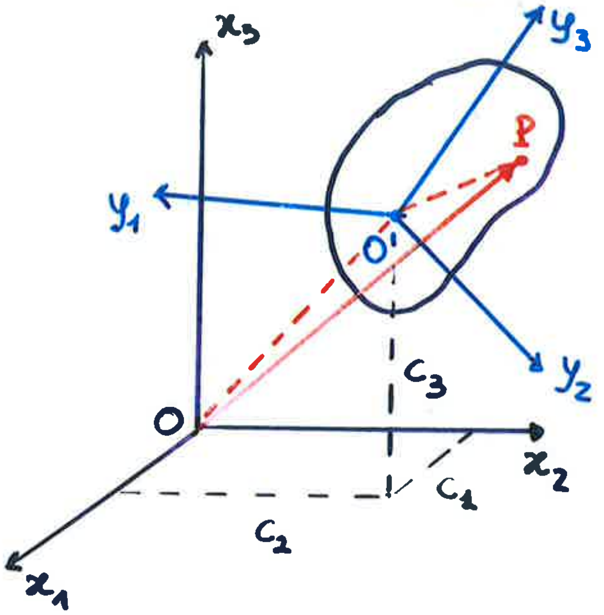
Per Schwartz:

$$\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial x_{1M}\partial\theta} = \frac{\partial^2\hat{F}}{\partial\theta\,\partial x_{1M}} \quad \text{cioè} \quad -(1+\mathrm{tg}^2\theta) = 0 \;\lightning$$

CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI

Ricordiamo che un corpo rigido è un sistema materiale vincolato in modo che le mutue distanze dei suoi punti risultino invariabili;

$$|P(t) - Q(t)| = \text{costante}$$



Dato un corpo rigido libero

$Ox_1x_2x_3$ riferimento fisso

$O'y_1y_2y_3$ riferimento solidale con il corpo rigido

$$P-O = (P-O') + (O'-O)$$

Proposizione: La posizione di ogni punto di un corpo rigido risulta individuata quando è nota la configurazione della terna solidale rispetto a quella fissa.

$$P-O = x_1 \bar{\imath}_1 + x_2 \bar{\imath}_2 + x_3 \bar{\imath}_3$$

$$P-O' = y_1 \bar{J}_1 + y_2 \bar{J}_2 + y_3 \bar{J}_3$$

$$O'-O = c_1 \bar{\imath}_1 + c_2 \bar{\imath}_2 + c_3 \bar{\imath}_3$$

da cui:

$$\boxed{\sum_{h=1}^{3} x_h \vec{i}_h = \sum_{h=1}^{3} c_h \vec{i}_h + \sum_{k=1}^{3} y_k \vec{J}_k}$$

Per conoscere la terna $\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3$ è sufficiente conoscere la proiezione di ogni versore $\bar{J}_k$ sugli assi $\vec{x}_i$ cioè:

$$\vec{i}_h \cdot \vec{J}_k = \alpha_{hk} \quad , \quad \bar{J}_k = \sum_{h=1}^{3} \alpha_{hk} \bar{i}_h$$

α_{hk} matrice dei coseni direttori di y_1, y_2, y_3

Sostituendo si ottiene:

$$\sum_{h=1}^{3} x_h \bar{i}_h = \sum_{h=1}^{3} c_h \bar{i}_h + \sum_{k=1}^{3} y_k \sum_{h=1}^{3} \alpha_{hk} \bar{i}_h$$

$$= \sum_{h=1}^{3} \left(c_h + \sum_{k=1}^{3} \alpha_{hk} y_k \right) \bar{i}_h$$

quindi:

$$\boxed{x_h = c_h + \sum_{k=1}^{3} \alpha_{hk} y_k} \qquad h = 1, 2, 3$$

oppure

$$\vec{x} = \vec{c} + \underset{\sim}{A} \vec{y}$$

dove $\vec{x} = (P-O)$; $\vec{c} = (O'-O)$; $\underset{\sim}{A} = [\alpha_{hk}]$; $\vec{y} = (P-O')$
rif. solida

Per individuare la posizione di un corpo rigido libero è sufficiente conoscere le 3 coordinate del punto O' e i 9 coseni direttori della matrice $\underset{\sim}{A}$ che però non sono tra loro indipendenti poichè la terna $\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3$ è ortonormale, cioè:

$$\bar{J}_h \cdot \bar{J}_k = \delta_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{se } h = k \\ 0 & \text{se } h \neq k \end{cases}$$

δ_{hk} simbolo di Kronecker

$$\bar{J}_h = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ih} \vec{\imath}_i \quad , \quad \bar{J}_k = \sum_{J=1}^{3} \alpha_{Jk} \vec{\imath}_J$$

$$\delta_{hk} = \bar{J}_h \cdot \bar{J}_k = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ih} \vec{\imath}_i \cdot \sum_{J=1}^{3} \alpha_{Jk} \vec{\imath}_J$$

$$= (\alpha_{1h} \bar{\imath}_1 + \alpha_{2h} \bar{\imath}_2 + \alpha_{3h} \bar{\imath}_3) \cdot (\alpha_{1k} \bar{\imath}_1 + \alpha_{2k} \bar{\imath}_2 + \alpha_{3k} \bar{\imath}_3)$$

$$= \alpha_{1h}\alpha_{1k} + \alpha_{2h}\alpha_{2k} + \alpha_{3h}\alpha_{3k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ih}\alpha_{ik}$$

(poiché $\bar{\imath}_i \cdot \bar{\imath}_J = \delta_{iJ}$)

se $h = k$ $\quad \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ih}^2 = 1 \Rightarrow$ 3 relazioni

se $h \neq k$ $\quad \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ih}\alpha_{ik} = 0 \Rightarrow$ 3 relazioni

da cui discendono 6 condizioni sui 9 coefficienti α_{hk}, perciò solo 3 di essi sono indipendenti.

In forma matriciale $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{A}^T = \underset{\sim}{1} \Rightarrow \underset{\sim}{A}$ è ortogonale cioè $\underset{\sim}{A}^T = \underset{\sim}{A}^{-1}$.

<u>Osservazione</u>: un corpo rigido libero ha 6 gradi di libertà, quindi 6 è il numero di parametri indipendenti per individuare la configurazione della terna solidale rispetto a quella fissa.

3 coordinate dell'origine O'

3 angoli indipendenti per individuare i coseni direttori

OSSERVAZIONE

$(\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3)$ è una base ortonormale

$$\bar{J}_h \cdot \bar{J}_k = \delta_{hk} = \begin{cases} 1 & h = k \\ 0 & h \neq k \end{cases}$$

$$\bar{J}_h = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ih} \bar{\imath}_i \qquad \bar{J}_k = \sum_{J=1}^{3} \alpha_{Jk} \vec{\imath}_J$$

$$\delta_{hk} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ih} \bar{\imath}_i \cdot \sum_{J=1}^{3} \alpha_{Jk} \vec{\imath}_J$$

$$= (\alpha_{1h} \bar{\imath}_1 + \alpha_{2h} \bar{\imath}_2 + \alpha_{3h} \bar{\imath}_3) \cdot (\alpha_{1k} \bar{\imath}_1 + \alpha_{2k} \bar{\imath}_2 + \alpha_{3k} \bar{\imath}_3)$$

$$= \alpha_{1h} \alpha_{1k} + \alpha_{2h} \alpha_{2k} + \alpha_{3h} \alpha_{3k}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ih} \alpha_{ik}$$

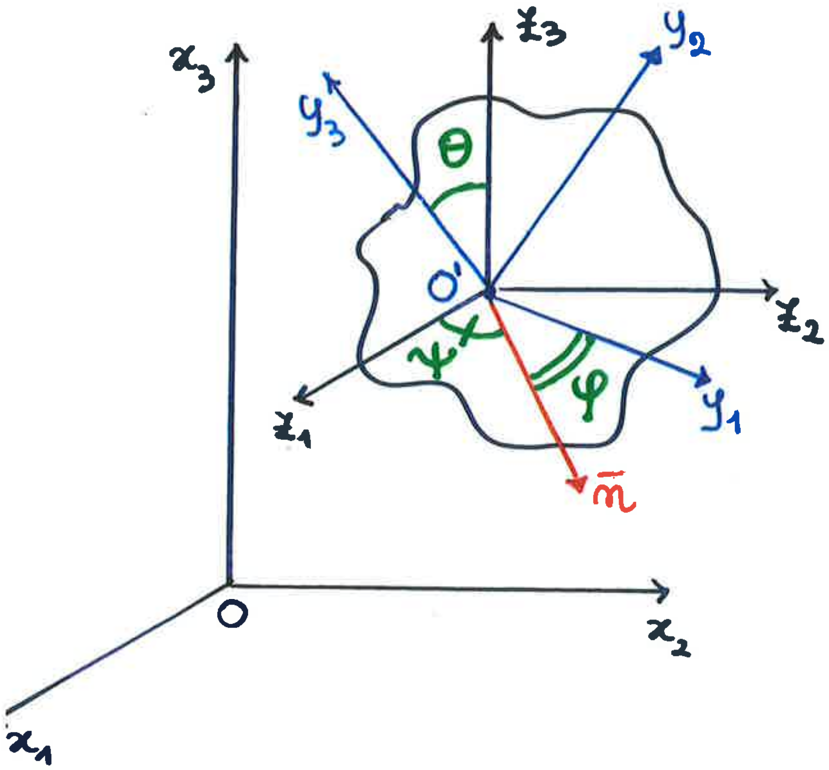
se $h = k$ $\quad \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ih} \alpha_{ik} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1 \\ \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 = 1 \\ \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 = 1 \end{cases}$ 3 relazioni

se $h \neq k$ $\quad \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ih} \alpha_{ik} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{11} \alpha_{12} + \alpha_{21} \alpha_{22} + \alpha_{31} \alpha_{32} = 0 & (1,2) \\ \alpha_{11} \alpha_{13} + \alpha_{21} \alpha_{23} + \alpha_{31} \alpha_{33} = 0 & (1,3) \\ \alpha_{12} \alpha_{13} + \alpha_{22} \alpha_{23} + \alpha_{32} \alpha_{33} = 0 & (2,3) \end{cases}$

3 relazioni

$$\underset{\sim}{A} = [\alpha_{hk}]$$

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{A}^T = \underset{\sim}{I} \Rightarrow \underset{\sim}{A}^T = \underset{\sim}{A}^{-1} \Rightarrow \underset{\sim}{A} \text{ ortogonale}$$



n : linea dei nodi
è l'intersezione del piano $O'y_1y_2$ con il piano $O'z_1z_2$, orientata in modo che $O'z_3y_3n$ sia una terna destra.
$n \in O'z_1z_2$, $\in O'y_1y_2$.

θ è detto angolo di nutazione

ψ è detto angolo di precessione tra $O'z_1$ ed $O'n$

φ è detto angolo di rotazione propria

(θ, ψ, φ) vengono detti ANGOLI DI EULERO.

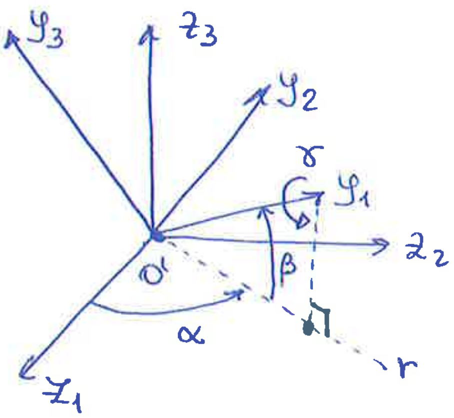
Il moto di un sistema rigido può essere descritto quando è noto il moto del punto O' e la legge con cui variano i coseni direttori α_{hk}, cioè:

$$\boxed{x_h(t) = c_h(t) + \sum_{k=1}^{3} \alpha_{hk}(t)\, y_k} \qquad h=1,2,3$$

le coordinate di P nel rif. $O'y_1y_2y_3$ non dipendono dal tempo proprio perchè $O'y_1y_2y_3$ è un rif. solidale con il corpo rigido (si muove assieme ad esso)

Nello studio del moto di un corpo rigido si suppone sempre che il moto sia riferito ad un assegnato intervallo di tempo $I \subset \mathbb{R}$.

ANGOLI DI CARDANO



$\boxed{\alpha, \beta, \gamma}$

α : latitudine

β : longitudine

γ : rotazione attorno ad y_1.

ingegneria: imbardata, beccheggio, rollio. (nave, aereo)

$\Rightarrow a_{hk}(\alpha, \beta, \gamma)$

se $\beta = \pm \pi/2$ $\quad y_1 \parallel z_3$ $\quad O'y_2y_3$ coincide con Oz_1z_3 $\quad \alpha, \gamma$ non definiti (r sparisce)