PARTICOLARI MOTI RIGIDI

<u>Def</u>: Chiamiamo **moto traslatorio** il moto di un corpo rigido in cui una qualunque terna solidale si mantiene invariabile rispetto all'osservatore fisso, cioè la matrice $[\alpha_{hk}]$ si mantiene costante durante il moto.

$$x_h(t) = c_h(t) + \sum_{k=1}^{3} \alpha_{hk} y_k$$

$$\dot{x}_h(t) = \dot{c}_h(t) \iff \bar{v}(P) = \bar{v}(O') \quad \forall P$$

$$\ddot{x}_h(t) = \ddot{c}_h(t)$$

cioè tutti i punti hanno la stessa velocità e accelerazione. Vale il viceversa, cioè se i punti hanno la stessa velocità (velocità di traslazione) allora il moto è di traslazione.

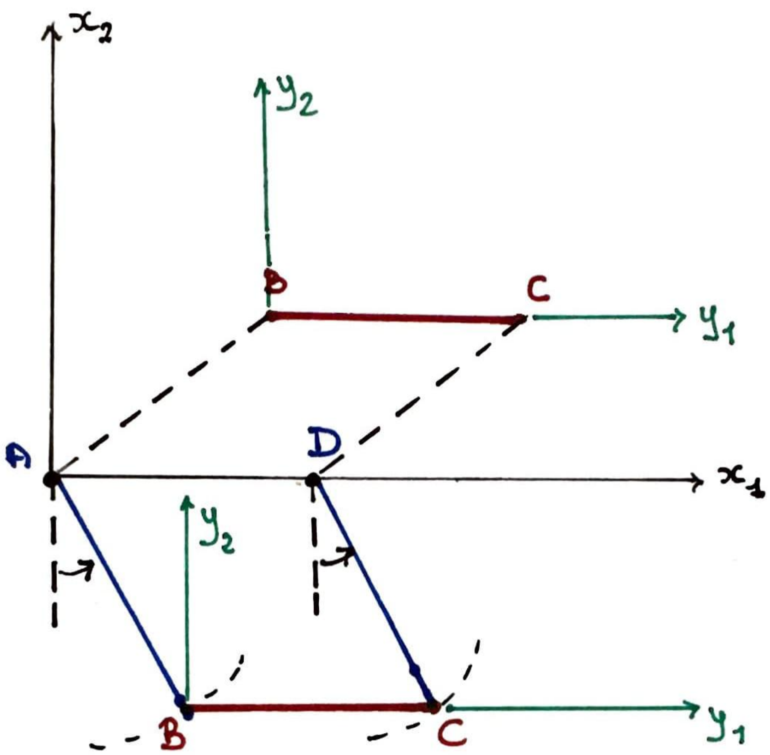
$$\boxed{\bar{v}(P(t)) = \bar{u}(t) \quad \forall P \quad t \in I \subset \mathbb{R}}$$

$\bar{u}$ indipendente da P : $\bar{u}(t) = \bar{v}(O')$.

$$\boxed{dP} = \bar{v}(P)\,dt = \bar{u}\,dt = \boxed{dO'}$$

<u>Def</u>: Un moto di traslazione è detto di **traslazione rettilinea (uniforme)** se il moto del generico punto del corpo rigido è <u>rettilineo</u> (uniforme).

Esempio: pag. 27 libro di testo



Sistema articolato ABCD costituito da 3 aste:

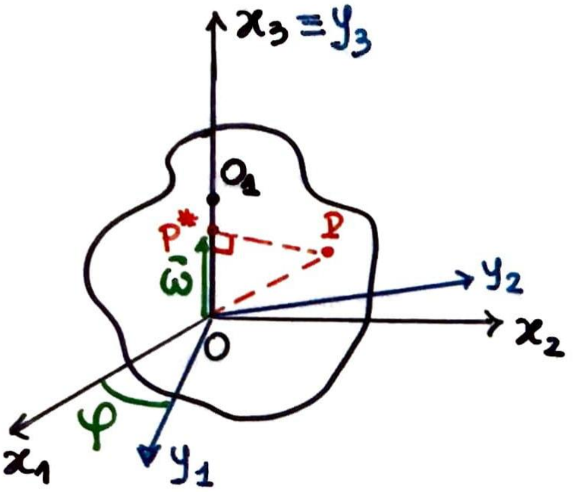
AB, DC di ugual lunghezza con A e D fissi rotanti attorno ad essi

BC incernierata in B e in C.

Il moto di BC risulta di traslazione perché il rif. $(B, y_1\, y_2)$ solidale con BC si mantiene sempre parallelo al rif. fisso (A, x_1, x_2) durante il moto di BC.

Def: Chiamiamo moto di rotazione il moto di un corpo rigido in cui tutti i punti di una retta solidale con il corpo rimangono fissi.

Tale retta è detta asse di rotazione.



$Ox_1x_2x_3$ terna fissa

$Oy_1y_2y_3$ terna solidale

Ox_3 coincide con l'asse di rotazione.

Sistema materiale con 1 g.d.l.

$\boxed{q = \varphi}$:

$$[\alpha_{hk}] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le equazioni del moto di rotazione per un corpo rigido

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos\varphi(t)\, y_1 - \operatorname{sen}\varphi(t)\, y_2 \\ x_2(t) = \operatorname{sen}\varphi(t)\, y_1 + \cos\varphi(t)\, y_2 \\ x_3(t) = y_3 \end{cases}$$

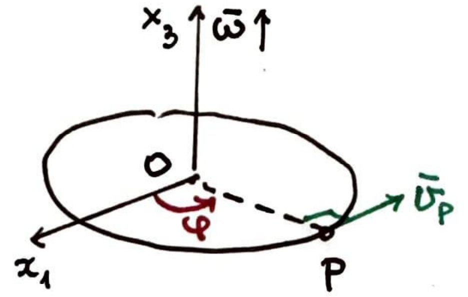
La traiettoria del generico punto del corpo rigido è una circonferenza:

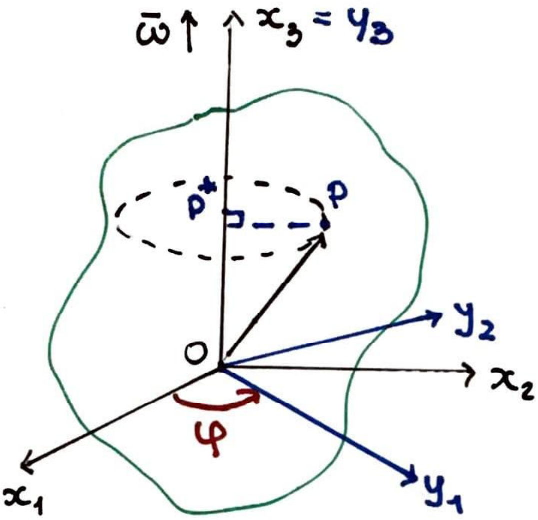
$$\begin{cases} x_1^2(t) + x_2^2(t) = y_1^2 + y_2^2 = \text{costante} \\ x_3(t) = y_3 = \text{costante} \end{cases}$$

La velocità del generico punto:

$$\bar{v}_P = \dot{\varphi}\, \bar{\imath}_3 \times (P - O) = \dot{\varphi}\, \bar{\imath}_3 \times [(P - P^*) + (P^* - O)]$$

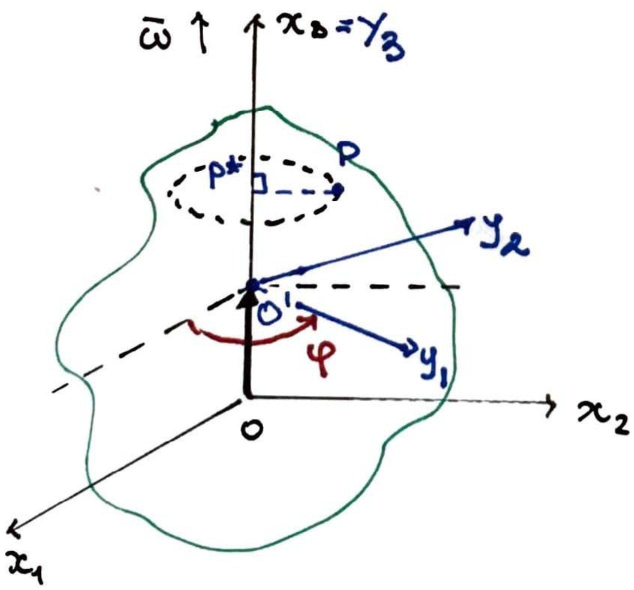
$$\bar{v}_P = \bar{\omega} \times (P-O) \qquad \bar{\omega} = \dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3$$





$$(P-O) = (P-P^*) + (P^*-O)$$

$$\bar{\omega} \times (P-O) = \bar{\omega} \times (P-P^*) + \underbrace{\bar{\omega} \times (P^*-O)}_{= \bar{0}}$$



pertanto:
$$\bar{v}_P = \dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3 \times (P - P^*)$$

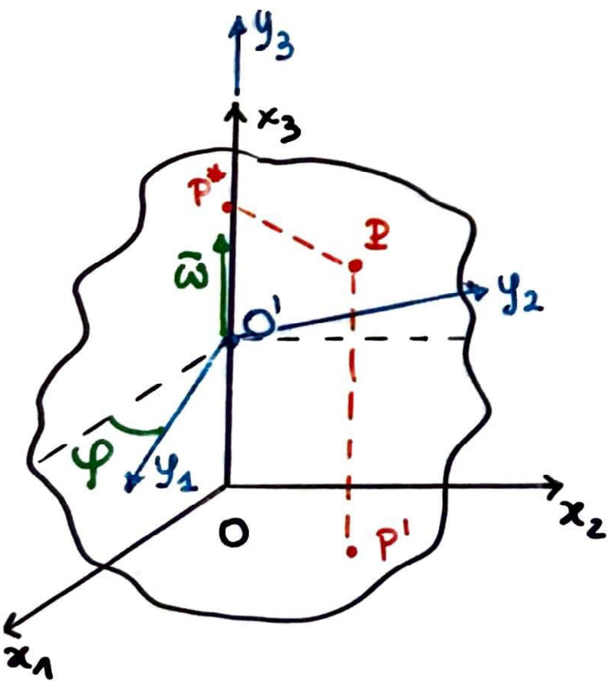
ma $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3$ velocità angolare

quindi $$\boxed{\bar{v}_P^{(t)} = \bar{\omega}^{(t)} \times (P_{(t)} - O)}$$

lo spostamento elementare: $dP = d\varphi\, \bar{\imath}_3 \times (P - O)$

Se $\underset{= \omega}{\dot{\varphi} = \text{costante}} \Rightarrow \varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ e il moto è di rotazione uniforme.

Def: Chiamiamo moto di rototraslazione il moto di un corpo rigido che si muove in modo che una retta solidale con il corpo scorra su una retta fissa.



$O' = (0, 0, c_3)$

$$[\alpha_{hk}] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le equazioni del moto:
$$\begin{cases} x_1(t) = \cos\varphi(t)\, y_1 - \operatorname{sen}\varphi(t)\, y_2 \\ x_2(t) = \operatorname{sen}\varphi(t)\, y_1 + \cos\varphi(t)\, y_2 \\ x_3(t) = y_3 + c_3(t) \end{cases}$$

Il generico punto si muove su un cilindro circolare retto con le generatrici parallele all'asse Ox_3.

La velocità del generico punto:

$$\bar{v}(P) = \dot{c}_3(t)\,\bar{\imath}_3 + \dot{\varphi}(t)\,\bar{\imath}_3 \times (P - O')$$

ossia:

$$\boxed{\bar{v}(P) = \bar{v}(O') + \bar{\omega} \times (P - O')} \qquad \bar{v}(O') \parallel \bar{\omega}$$

Infatti:

$$\bar{v}(P) = \underbrace{\dot{x}_1\,\bar{\imath}_1 + \dot{x}_2\,\bar{\imath}_2}_{\bar{v}(P')} + \dot{x}_3\,\bar{\imath}_3 = \bar{v}(P') + \underbrace{\dot{c}_3(t)\,\bar{\imath}_3}_{\bar{v}(O')} = \bar{v}(P') + \bar{v}(O')$$

ma

$$\bar{v}(P') = \dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3 \times (P' - O) = \dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3 \times [(P' - O') + \cancel{(O' - O)}] \qquad (O' - O) \parallel \bar{\imath}_3$$

$$= \dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3 \times (P' - O')$$

allora si ha:

$$\bar{v}(P) = \bar{v}(O') + \dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3 \times (P' - O') = \bar{v}(O') + \dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3 \times [\cancel{(P' - P)} + (P - O')] \qquad (P' - P) \parallel \bar{\imath}_3$$

$$= \bar{v}(O') + \dot{\varphi}\,\bar{\imath}_3 \times (P - O') = \bar{v}(O') + \bar{\omega} \times (P - O')$$

Lo spostamento elementare:

$$dP = dO' + d\varphi\,\bar{\imath}_3 \times (P - O')$$

Def: Il moto rototraslatorio è detto elicoidale se $\bar{v}(O') = h\,\bar{\omega}$ con h = costante ~~(cioè se $\bar{v}(O')$ è parallelo ad $\bar{\omega}$)~~

Allora $c_3(t) = h\,\varphi(t)$.

N.B. se $v(O') = k(t)\,\vec{\omega}$ il moto è solo rototraslatorio

ATTO DI MOTO

Def: Chiamiamo atto di moto o stato cinetico di un corpo rigido in un istante t, l'insieme delle velocità dei singoli punti del corpo nell'istante considerato $t \in I \subset \mathbb{R}$.

Def: Chiamiamo atto di moto di traslazione nell'istante t, una distribuzione delle velocità:

$$\boxed{\bar{v}_P(t) = \bar{v}_{O'}(t) \quad \forall P}$$

O' pto particolare di (S,n

Oss: Se ad ogni istante l'atto di moto di un corpo è di traslazione allora il moto è di traslazione e viceversa.

Def: Chiamiamo atto di moto di rotazione nell'istante t, una distribuzione delle velocità:

$$\boxed{\bar{v}_P(t) = \bar{\omega}(t) \times (P - O')}$$

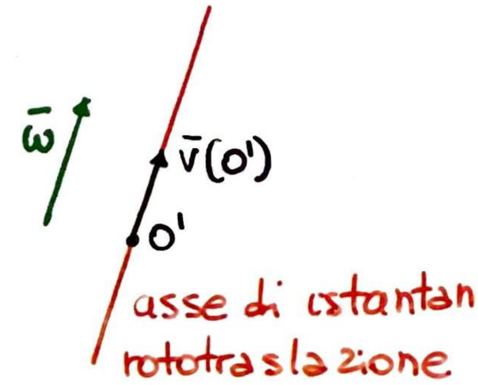
$\bar{\omega}$ è detto velocità angolare istantanea.

Il supporto di $\bar{\omega}$ è detto asse di istantanea rotazione.

Oss: Se un corpo rigido si muove di moto di rotazione, in ogni istante passa per uno stato cinetico di rotazione, ma non vale il viceversa (l'asse può variare istante per istante).

Def: Chiamiamo atto di moto di rototraslazione o elicoidale nell'istante t, una distribuzione delle velocità:

$$\boxed{\bar{v}_P(t) = \bar{v}_{O'}(t) + \bar{\omega}(t) \times (P - O')}$$



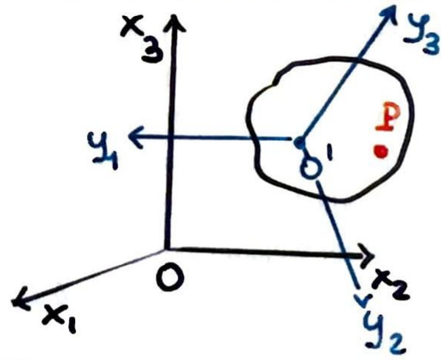
con O' tale che $\bar{v}_{O'} \parallel \bar{\omega}$.

Oss: Se il corpo rigido si muove di moto elicoidale in ogni istante passa per uno stato cinetico elicoidale, ma non vale il viceversa. ■

FORMULE DI POISSON

Consideriamo l'identità $\boxed{P-O = (P-O') + (O'-O)}$ e deriviamo rispetto al tempo.

$$\bar{v}_P(t) = \frac{d}{dt}(P-O') + \bar{v}_{O'}(t)$$



$$P-O' = \sum_{h=1}^{3} y_h \vec{J}_h$$, quindi:

$$\boxed{\bar{v}_P(t) = \bar{v}_{O'}(t) + \sum_{h=1}^{3} y_h \frac{d}{dt} \bar{J}_h(t)}$$

Teorema: Se $\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3$ è una terna di versori ortonormale variabile col tempo, allora esiste un unico vettore $\bar{\omega} = \hat{\bar{\omega}}(t)$ tale che

$$\boxed{\frac{d}{dt}\bar{J}_h(t) = \bar{\omega}(t) \times \bar{J}_h(t)} \quad h = 1, 2, 3$$

FORMULE DI POISSON

FORMULE DI POISSON

Data base ortonormale $(\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3)$ variabile col tempo.

$\exists!\ \bar{\omega} : \frac{d}{dt}\bar{J}_h(t) = \bar{\omega}(t) \times \bar{J}_h(t)$

$\bar{J}_h(t) : |\bar{J}_h(t)| = 1 \qquad h = 1, 2, 3$

$\bar{J}_h \cdot \bar{J}_h = 1$

$$\frac{d}{dt}(\bar{J}_h \cdot \bar{J}_h) = 0 \implies \dot{\bar{J}}_h \cdot \bar{J}_h + \bar{J}_h \cdot \dot{\bar{J}}_h = 0$$

$$\implies 2\frac{d}{dt}\bar{J}_h \cdot \bar{J}_h = 0$$

$$\implies \bar{J}_h \perp \frac{d}{dt}\bar{J}_h$$

Per la divisione vettoriale

$\bar{a}, \bar{b} \quad \bar{a} \perp \bar{b} \qquad \exists\ \vec{x} : \vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$

$$\Downarrow$$

$$\vec{x} = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{a^2} + \lambda\bar{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$\downarrow$ componente arbitraria

$\implies \exists\ \bar{\omega}_h : \bar{\omega}_h \times \bar{J}_h = \frac{d}{dt}\bar{J}_h \qquad h = 1, 2, 3.$

con $\bar{\omega}_h$ avente componente arbitraria lungo $\bar{J}_h$.

Voglio dimostrare che $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3$, cioè $\bar{\omega}$ è unico.

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1 = \omega_{11}\bar{J}_1 + \omega_{12}\bar{J}_2 + \omega_{13}\bar{J}_3 \\ \bar{\omega}_2 = \omega_{21}\bar{J}_1 + \omega_{22}\bar{J}_2 + \omega_{23}\bar{J}_3 \\ \bar{\omega}_3 = \omega_{31}\bar{J}_1 + \omega_{32}\bar{J}_2 + \omega_{33}\bar{J}_3 \end{cases}$$

cioè scrivo $\bar{\omega}_h$ in funzione della base.

$$\begin{cases} \omega_{11} = \bar{\omega}_1 \cdot \bar{J}_1 \\ \omega_{22} = \bar{\omega}_2 \cdot \bar{J}_2 \\ \omega_{33} = \bar{\omega}_3 \cdot \bar{J}_3 \end{cases}$$

sono arbitrarie e possono quindi essere scelte ad hoc.

$$\bar{J}_h \cdot \bar{J}_k = \delta_{hk}$$

$h \neq k \qquad \bar{J}_h \cdot \bar{J}_k = 0$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\bar{J}_h \cdot \bar{J}_k\right) = \underline{\frac{d}{dt}\bar{J}_h} \cdot \bar{J}_k + \bar{J}_h \cdot \underline{\frac{d}{dt}\bar{J}_k}$$

$$\underline{(\bar{\omega}_h \times \bar{J}_h)} \cdot \bar{J}_k + \bar{J}_h \cdot \underline{(\bar{\omega}_k \times \bar{J}_k)} = 0$$

$$\bar{\omega}_h \cdot (\bar{J}_h \times \bar{J}_k) + \bar{\omega}_k \cdot (\bar{J}_k \times \bar{J}_h) = 0$$

$$\boxed{\bar{\omega}_h \cdot (\bar{J}_h \times \bar{J}_k) - \bar{\omega}_k \cdot (\bar{J}_h \times \bar{J}_k) = 0}$$

- $h = 1, \ k = 2$

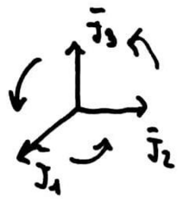
$$\bar{\omega}_1 \cdot (\bar{J}_1 \times \bar{J}_2) - \bar{\omega}_2 \cdot (\bar{J}_1 \times \bar{J}_2) = 0$$

$$\bar{\omega}_1 \cdot \bar{J}_3 - \bar{\omega}_2 \cdot \bar{J}_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_{13} - \omega_{23} = 0 \qquad \omega_{23} = \omega_{13}$$

- $h = 1, \ k = 3$



$$\bar{\omega}_1 \cdot (\bar{J}_1 \times \bar{J}_3) - \bar{\omega}_3 \cdot (\bar{J}_1 \times \bar{J}_3) = 0$$

$$\bar{\omega}_1 \cdot (-\bar{J}_2) - \bar{\omega}_3 \cdot (-\bar{J}_2) = 0$$

$$-\bar{\omega}_1 \cdot \bar{J}_2 + \bar{\omega}_3 \cdot \bar{J}_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\omega_{12} + \omega_{32} = 0 \qquad \omega_{32} = \omega_{12}$$

Poiché $\underline{\omega_{11}} = \bar{\omega}_1 \cdot \bar{J}_1$ è arbitraria la posso scegliere uguale

a $\bar{\omega}_2 \cdot \bar{J}_1 = \underline{\omega_{21}}$

Poiché $\underline{\omega_{22}} = \bar{\omega}_2 \cdot \bar{J}_2$ è arbitraria la posso scegliere uguale

a $\bar{\omega}_1 \cdot \bar{J}_2 = \underline{\omega_{12}}$

Allora da:

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1 = \omega_{11}\bar{J}_1 + \omega_{12}\bar{J}_2 + \omega_{13}\bar{J}_3 \\ \qquad\ \ \parallel \qquad\quad\ \ \parallel \qquad\quad\ \ \parallel \\ \bar{\omega}_2 = \omega_{21}\bar{J}_1 + \omega_{22}\bar{J}_2 + \omega_{23}\bar{J}_3 \end{cases}$$

e quindi $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$

- $h = 2,\ k = 3$

$\bar{\omega}_2 \cdot (\bar{J}_2 \times \bar{J}_3) = \bar{\omega}_3 \cdot (\bar{J}_2 \times \bar{J}_3) = 0$

$\bar{\omega}_2 \cdot \bar{J}_1 - \bar{\omega}_3 \cdot \bar{J}_1 = 0$

$\omega_{21} - \omega_{31} = 0 \qquad \omega_{21} = \omega_{31}$

Poiché $\underbrace{\omega_{33}}$ $= \bar{\omega}_3 \cdot \bar{J}_3$ è arbitraria la posso scegliere

uguale a $\bar{\omega}_1 \cdot \bar{J}_3 = \underbrace{\omega_{13}}$

Quindi

$$\bar{\omega}_1 = \omega_{11} \bar{J}_1 + \omega_{12} \bar{J}_2 + \omega_{13} \bar{J}_3$$

$$\bar{\omega}_2 = \omega_{21} \bar{J}_1 + \omega_{22} \bar{J}_2 + \omega_{23} \bar{J}_3$$

$$\bar{\omega}_3 = \omega_{31} \bar{J}_1 + \omega_{32} \bar{J}_2 + \omega_{33} \bar{J}_3$$

pertanto

$\omega_{31} = \omega_{21} \qquad \omega_{32} = \omega_{12} = \omega_{22} \qquad \omega_{33} = \omega_{13} = \omega_{23}$

e quindi $\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_2$

e allora $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3 \Rightarrow \exists!\ \omega(t)$

Riprendiamo la formula:

$$\bar{v}_P(t) = \bar{v}_{O'}(t) + \sum_{h=1}^{3} y_h \frac{d}{dt} \bar{J}_h(t) \qquad \text{per Poisson}$$

$$= \bar{v}_{O'}(t) + \sum_{h=1}^{3} y_h \, \bar{\omega}(t) \times \bar{J}_h(t)$$

$$= \bar{v}_{O'}(t) + \bar{\omega}(t) \times \sum_{h=1}^{3} y_h \bar{J}_h(t)$$

cioè:

$$\boxed{\bar{v}_P(t) = \bar{v}_{O'}(t) + \bar{\omega}(t) \times (P - O')}$$

rappresenta la FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI dove il vettore $\bar{\omega}$ non dipende da P.

Osservazioni:

1) il vettore $\bar{\omega}$ è unico. Se esistessero due vettori $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega}_1 \times (P-O')$$
$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega}_2 \times (P-O')$$

si avrebbe

$$(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \times (P-O') = \bar{0} \quad \forall P \Rightarrow \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 .$$

2) il vettore $\bar{\omega}$ non dipende dal punto O'. Infatti, scelto un punto O'', dalla f.f.c.

$$\bar{v}_{O''} = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times (O''-O')$$

e quindi

$$\boxed{\bar{v}_P} = \left(v_{O''} - \bar{\omega} \times (O''-O')\right) + \bar{\omega} \times (P-O')$$
$$= \boxed{\bar{v}_{O''} + \bar{\omega} \times (P-O'')}$$

Ogni atto di moto di un corpo rigido risulta dalla composizione di un atto di moto di traslazione e di uno di rotazione.

In termini di spostamenti elementari rigidi:

$$\bar{v}_P \, dt = dP = dO' + \bar{\omega} \, dt \times (P-O') = dO' + d\varphi \bar{k} \times (P-O')$$

Mentre il moto è qualcosa che riguarda un intervallo di tempo $I \subset \mathbb{R}$, l' atto di moto è qualcosa ~~che~~ relativo ad un determinato istante.

Possiamo ricavare la f.f.c. usando la notazione matriciale:

$$\vec{x}(t) = \vec{c}(t) + \underset{\sim}{A}(t)\,\vec{y} \qquad \vec{y} = \underset{\sim}{A}^{-1}(\vec{x} - \vec{c})$$

derivata:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{c}}(t) + \dot{\underset{\sim}{A}}(t)\,\vec{y}$$

poiché $\underset{\sim}{A}$ è ortogonale $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{A}^T = \underset{\sim}{1\!\!1}$ cioè $\underset{\sim}{A}^{-1} = \underset{\sim}{A}^T$ si ha:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{c}}(t) + \dot{\underset{\sim}{A}}(t)\left[\underset{\sim}{A}^T(t)\left(\vec{x}(t) - \vec{c}(t)\right)\right]$$

e $\quad \dot{\underset{\sim}{A}}\,\underset{\sim}{A}^T + \underset{\sim}{A}\,\dot{\underset{\sim}{A}}^T = 0 \quad , \ (\underset{\sim}{A}^T)^{\cdot} = (\dot{\underset{\sim}{A}})^T \ ,$

$$\dot{\underset{\sim}{A}}\,\underset{\sim}{A}^T = -\left(\dot{\underset{\sim}{A}}\,\underset{\sim}{A}^T\right)^T$$

cioè $\dot{\underset{\sim}{A}}\,\underset{\sim}{A}^T$ è una matrice emisimmetrica, allora esiste un vettore $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ in $Ox_1x_2x_3$:

$$\dot{\underset{\sim}{A}}\,\underset{\sim}{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\dot{\underset{\sim}{A}}\,\underset{\sim}{A}^T\right)\bar{u} = \bar{\omega} \times \bar{u} \qquad \forall \bar{u}$$

Infine, ricordando che:

$\vec{x} - \vec{c} = P - O' \ ; \ \dot{\vec{x}} = \bar{v}_P \ ; \ \dot{\vec{c}} = \bar{v}_{O'}$

si ottiene:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O'} + (\bar{\omega}\times)(P - O') .$$

Se deriviamo rispetto al tempo la f.f.e.:

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{O'} + \underbrace{\frac{d}{dt}\bar{\omega}}_{\dot{\bar{\omega}}} \times (P - O') + \bar{\omega} \times \Big[\underbrace{\frac{d}{dt}(P - O')}_{\bar{v}_P - \bar{v}_{O'}}\Big]$$

ma dalla f.f.c. si ha che:

$$\bar{v}_P - \bar{v}_{O'} = \bar{\omega} \times (P-O')$$

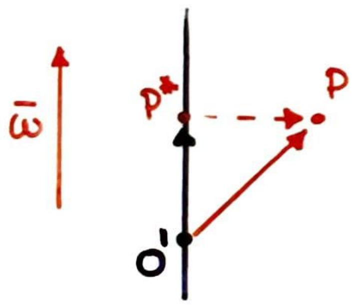
quindi:

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{O'} + \underbrace{\frac{d}{dt}\bar{\omega}}_{=\dot{\bar{\omega}}} \times (P-O') + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (P-O')]$$

$\bar{a}_{O'}$: accelerazione del punto O';

$\frac{d}{dt}\bar{\omega}$: variazione del vettore $\bar{\omega}(t)$;

$$\bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (P-O')] = \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (P-P^*) + \bar{\omega} \times (P^* - O')]$$



$$= \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (P-P^*)] \quad \text{regola d.p.v.}$$

$$= \underbrace{[\bar{\omega} \cdot (P-P^*)]}_{=0}\bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{\omega})(P-P^*)$$

$$= -\omega^2 (P-P^*)$$

quindi:

$$\boxed{\bar{a}_P(t) = \bar{a}_{O'}(t) + \dot{\bar{\omega}}(t) \times (P-O') - \omega^2(t)(P-P^*)}$$

rappresenta la distribuzione delle accelerazioni di un corpo rigido.

<u>N.B.</u>: In un <u>moto rotatorio</u> <u>uniforme</u> attorno ad un asse passante per O':

$$\underline{\bar{a}_P(t) = -\omega^2 (P-P^*)}$$

TEOREMA DI MOZZI

Dalla f.f.c. dei sistemi rigidi segue che l'atto di moto di un corpo rigido risulta sempre somma di un atto di moto traslatorio e di uno rotatorio, ma non discende che il più generale atto di moto rigido è rototraslatorio.

Teorema di Mozzi: Im ogni istante, il più generale atto di moto di un sistema rigido è rototraslatorio o elicoidale.
In particolare può risultare traslatorio o rotatorio.

Dim: Riprendiamo f.f.c.:

$$\bar{v}_P(t) = \bar{v}_{O'}(t) + \bar{\omega}(t) \times (P - O')$$

- se $\bar{\omega} \neq \bar{0}$

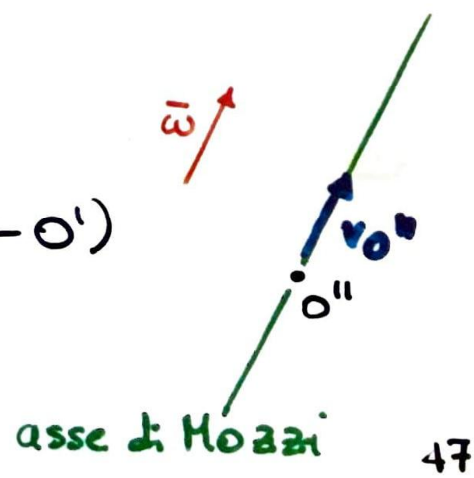
$\bar{v}_{O'}$ si può sempre scomporre in due direzioni una parallela ad $\bar{\omega}$: $\bar{v}_{O'}^{\parallel}$ ed una ortogonale : $\bar{v}_{O'}^{\perp}$

Dati due vettori ortogonali $\bar{v}_{O'}^{\perp}, \bar{\omega}$ esiste sempre (per la divisione vettoriale) un vettore $(O' - O'')$ ortogonale a $\bar{v}_{O'}^{\perp}$ tale che:

$$\bar{v}_{O'}^{\perp} = \bar{\omega} \times (O' - O'')$$

$$\bar{v}_P(t) = \bar{v}_{O'}^{\parallel}(t) + \bar{v}_{O'}^{\perp}(t) + \bar{\omega}(t) \times (P - O')$$

$$= \bar{v}_{O'}^{\parallel}(t) + \bar{\omega}(t) \times (P - O'')$$



ponendo $P = O'' \Rightarrow \bar{v}_{O''}(t) = \bar{v}_{O'}{}''(t)$, da cui:

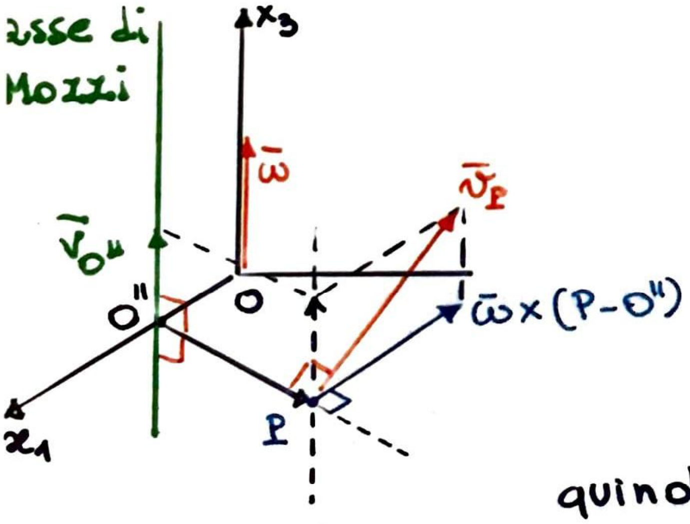
$$\boxed{\bar{v}_P(t) = \bar{v}_{O''}(t) + \bar{\omega}(t) \times (P - O'')}$$ atto di moto rototraslatorio

con $\underline{\bar{v}_{O''} \parallel \bar{\omega}}$.

- se $\bar{\omega} = \bar{0}$ allora $\underline{\bar{v}_P(t) = \bar{v}_{O''}(t)}$ atto di moto traslatorio
- se $\bar{v}_{O''} = \bar{0}$ allora $\underline{\bar{v}_P(t) = \bar{\omega}(t) \times (P - O'')}$ atto di moto rotatorio

In analogia con la teoria dei vettori applicati, se $\bar{\omega} \neq \bar{0}$ esiste un asse detto asse del Mozzi i cui punti hanno velocità nulla o parallela ad $\bar{\omega}$. Tale asse, passante per O'', è parallelo ad $\bar{\omega}$.

Tramite il teorema di Mozzi lo stato cinetico rigido generico è dato dalla composizione di uno stato cinetico traslatorio nella direzione dell'asse di Mozzi e di uno stato cinetico rotatorio attorno allo stesso asse.



$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O''} + \bar{\omega} \times (P - O'')$$

$$\bar{v}_{O''} \parallel \bar{\omega}$$

$$\underline{\bar{\omega} \times (P - O'')} \perp \bar{v}_{O''} \,, \quad \forall P \Rightarrow$$

$$\| \bar{v}_P \|^2 = \| \bar{v}_{O''} + \bar{\omega} \times (P - O'') \|^2$$

$$= \| \bar{v}_{O''} \|^2 + \| \bar{\omega} \times (P - O'') \|^2$$

quindi $\| \bar{v}_P \| \geq \| \bar{v}_{O''} \|$, $\forall P$

I punti dell'asse di Mozzi hanno velocità minima, poiché $\| \bar{v}_P \| = \| \bar{v}_{O''} \|$ sse $P \in$ asse di Mozzi.

Lo stato cinetico è rotatorio sse tutti i punti dell'asse di Mozzi hanno velocità nulla, cioè $\bar{v}_{O''} = \bar{0}$ e in tal caso l'asse di Mozzi coincide con l'asse di istantanea rotazione.