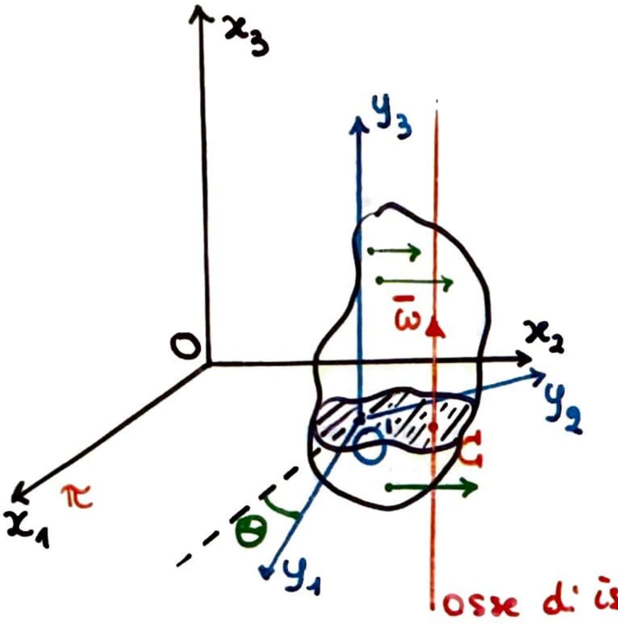
MOTI RIGIDI PIANI



Def: Un corpo rigido si muove di moto rigido piano se le velocità dei suoi punti si mantengono sempre parallele ad un piano fisso π, in ogni istante.

Teorema: L'atto di moto di un corpo rigido che si muove di moto rigido piano è sempre rotatorio (o traslatorio.)

Dim: Sia $Ox_1x_2x_3$ (rif. fisso) con $Ox_3 \perp \pi$ $(= Ox_1x_2)$

Si può sempre scegliere il rif. solidale con il corpo rigido $O'y_1y_2y_3$ avente $Oy_3 \parallel Ox_3$. Allora $\bar{J}_3$ è un versore costante in modulo, direzione e verso.

- se $\bar{\omega} \neq \bar{0}$, per le formule di Poisson:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\bar{J}_3 = \bar{\omega} \times \bar{J}_3 = \bar{0}}$$

quindi $\bar{\omega} \parallel \bar{J}_3$, cioè $\bar{\omega} \perp \pi$.

Poichè la velocità di ogni punto P del corpo è $\parallel$ a π si ha che $\bar{v}_{O'} \perp \bar{\omega}$. Per la divisione vettoriale, esiste sempre un punto O'' tale che:

$$\boxed{v_{O'} = \bar{\omega} \times (O' - O'')}$$

Dalla formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi:

$$\bar{v}_P(t) = \bar{v}_{O'}(t) + \bar{\omega}(t) \times (P - O')$$
$$= \bar{\omega}(t) \times (O' - O'') + \bar{\omega}(t) \times (P - O')$$
$$= \bar{\omega}(t) \times (P - O'')$$

cioè l'atto di moto è rotatorio.

- se $\bar{\omega} = \bar{0}$, direttamente dalla f.f.c. si ha:

$$\bar{v}_P(t) = \bar{v}_{O'}(t)$$

cioè l'atto di moto è traslatorio.

Poichè l'atto di moto traslatorio può essere pensato come caso degenere di un atto di moto di rotazione con asse di istantanea rotazione (supporto di $\bar{\omega}$) all'infinito, si suppone lo stato cinetico sempre di rotazione.

Osservazione: Un sistema che si muove di moto rigido piano ha 3 gradi di libertà: le coordinate di O' nel piano Ox_1x_2 e l'angolo θ che l'asse Oy_1 forma con quello parallelo ad Ox_1 passante per O'.

Il moto del corpo è individuato dal moto di una figura rigida piana (rif. $O'y_1y_2$), solidale col corpo, che si muove sul piano Ox_1x_2 (π).

Def: Chiamiamo centro istantaneo di rotazione C l'intersezione tra il piano π e l'asse di istantanea rotazione

Dalla definizione di centro di istantanea rotazione si ha che, $\forall P \in O'y_1y_2$:

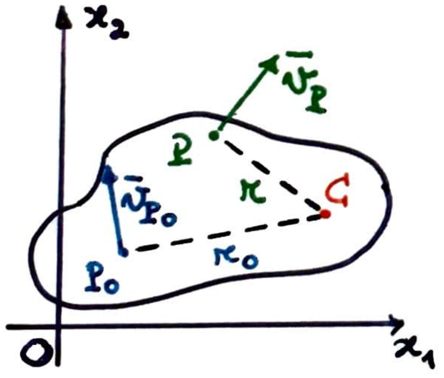
$$\underline{\bar{v}_P(t) = \bar{\omega}(t) \times [P(t) - C(t)]}$$

$(\bar{v}_C(t) = \bar{0})$. Moltiplicando scalarmente per $(P-C)$ si ottiene

$$\bar{v}_P \cdot (P-C) = \bar{\omega} \times (P-C) \cdot (P-C) = 0$$

perciò la velocità di ogni punto di una figura piana che si muove nel proprio piano <u>è ortogonale alla congiungente P con C.</u>

Proposizione La velocità di ogni punto di una figura piana, mobile nel proprio piano, è determinata una volta che sia nota la posizione del centro C e la velocità di un punto P_0 della figura.



<u>Dim</u>: Siano note $\bar{v}_{P_0}$ e la posizione del centro C.

$\bar{v}_P \perp (P-C)$ nel verso di $\bar{v}_{P_0}$ e

$$\bar{v}_P = \bar{\omega} \times (P-C)$$

si ottiene: $\begin{cases} v_{P_0} = \omega r_0 \\ v_P = \omega r \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_P = \dfrac{r}{r_0} v_{P_0}}$

<u>Osservazioni</u>

1) se $P \equiv C \Rightarrow \bar{v}_C \equiv \bar{0}$ $(r = 0)$

2) se $C \to \infty$ $(P-C) \to$ parallelo a $(P_0 - C)$ e $\bar{v}_P \to \parallel \bar{v}_{P_0}$

$$\frac{r_0}{r} = \frac{|P_0 - C|}{|P-C|} = \frac{|(P_0 - P) + (P-C)|}{|P-C|} \leq \underbrace{\frac{|P_0 - P|}{|P-C|}}_{0} + \frac{\overset{=1}{|P-C|}}{|P-C|} \xrightarrow[C \to \infty]{} 1$$

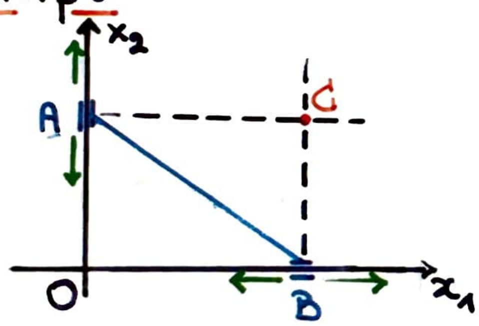
cioè tutti i punti hanno la stessa velocità essendo $\bar{v}_P$ e $\bar{v}_{P_0}$ con uguale direzione, verso e modulo.

$\Rightarrow$ quando $C \to \infty$ l'atto di moto è traslatorio.

Teorema di Chasles: Note in un dato istante le direzioni delle velocità di due punti della figura piana, il centro istantaneo di rotazione si ottiene come intersezione delle normali alle velocità dei punti considerati. (senza dimostrazione)

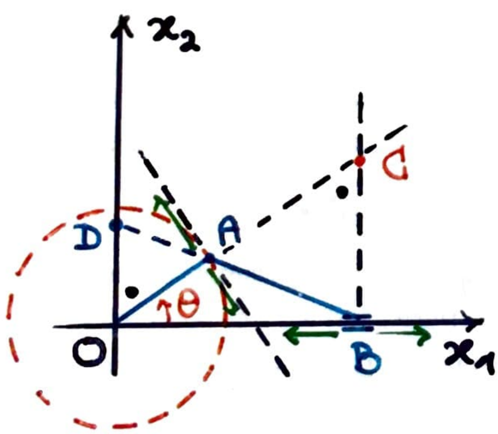
Esempi

1)



Asta $\overline{AB}$ con gli estremi A e B vincolati a muoversi lungo 2 guide rettilinee Ox_1, Ox_2 ortogonali fra loro.

2)



Sistema manovella – biella – pistone
(OA) (AB) (B)

che ruota attorno ad O fisso.

C: centro ist. rot. per AB.

$v_A = |A-O||\dot{\theta}| = \omega_{OA}|A-O|$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{|C-A|\cancel{\omega_{AB}}}{|C-B|\cancel{\omega_{AB}}}$$

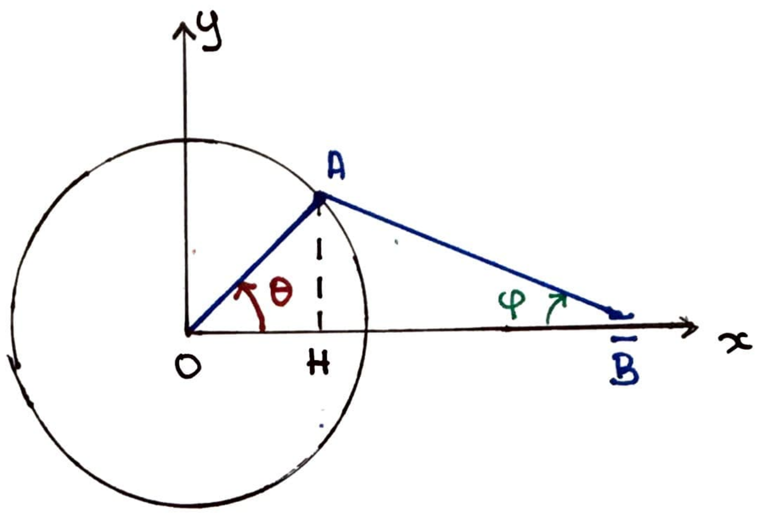
da cui:
$$v_B = \frac{|A-O|\,|C-B|}{|C-A|}|\dot{\theta}|$$

I triangoli OAD e ABC sono simili, quindi

$\overline{OD}:\overline{CB}=\overline{OA}:\overline{AC}$

$$|D-O| = \frac{|C-B|\,|A-O|}{|C-A|} \Rightarrow v_B = |D-O||\dot{\theta}| = v_D'$$

velocità del pto della manovella OA che coincide con D. 6



$\bar{\omega}_{OA} = \dot{\theta}\,\vec{k}$

$\bar{\omega}_{AB} = -\dot{\varphi}\,\vec{k}$

Legame tra θ e φ

Se $\overline{AB} \equiv \overline{OA} \Rightarrow \varphi = \theta \Rightarrow \bar{\omega}_{AB} = -\dot{\theta}\,\vec{k}$

se $\overline{AB} \neq \overline{OA}$

$\overline{AH} = \overline{OA} \sin\theta \qquad \overline{OA} = R$

$\overline{AH} = \overline{AB} \sin\varphi \qquad \overline{AB} = L$

$\Rightarrow \boxed{R \sin\theta = L \sin\varphi}$

LEGAME

$R \cos\theta\, \dot{\theta} = L \cos\varphi\, \dot{\varphi}$

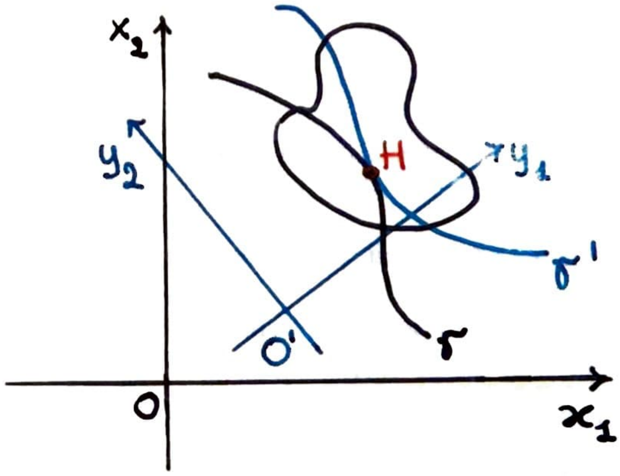
$\dot{\varphi} = \frac{R}{L} \frac{\cos\theta}{\cos\varphi} \dot{\theta}$ ma $\cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \sin^2\varphi}$

$= \pm\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2\theta}$

$= \pm \frac{1}{L} \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2\theta}$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{R \cos\theta}{\pm\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2\theta}}\, \dot{\theta}$$

TRAIETTORIE POLARI



γ curva del piano fisso Ox_1x_2

γ' curva del piano mobile $O'y_1y_2$

Se γ, γ' sono sufficientemente regolari ammettono tangente comune nel punto di contatto H

$\Rightarrow$ γ' rotola su γ.

Def: Chiamiamo velocità di strisciamento la velocità del punto di γ' che coincide, nell'istante considerato col punto di contatto H.

Se la velocità di strisciamento è nulla allora γ' rotola senza strisciare su γ.

Teorema. Quando durante il moto, una curva γ' rotola su γ, la velocità del punto di γ' che coincide con H, cioè la velocità di strisciamento, è diretta secondo la tangente a γ in H.

Dim: Scriviamo la velocità di H rispetto al rif. fisso Ox_1x_2 e rispetto a quello mobile $O'y_1y_2$. Per il teor. di composizione delle velocità:

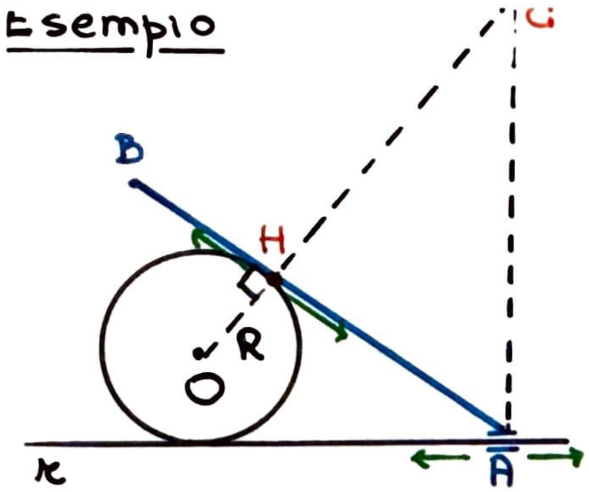
$$\bar{v}_a(H) = \bar{v}_r(H) + \bar{v}_\tau(H) \text{ vel. di strisciamento}$$

dove $\bar{v}_a(H)$ è tangente a γ e $\bar{v}_r(H)$ è tangente a γ', quindi $\bar{v}_a(H) \parallel \bar{v}_r(H)$ poiché γ e γ' hanno tangente comune in H.

$\Rightarrow$ $\bar{v}_\tau(H)$ è diretta secondo la tangente a γ in H.

La $\bar{v}_\tau(H)$: velocità di trascinamento di H è la velocità di strisciamento.

Esempio



Asta AB appoggiata ad una circonferenza fissa di centro O e raggio R e ad una guida rettilinea r.
L'asta durante il suo moto inviluppa la circonferenza perciò $\bar{v}_H \parallel \overline{AB}$ ($H \in \overline{AB}$) (che coincide con il punto di contatto).

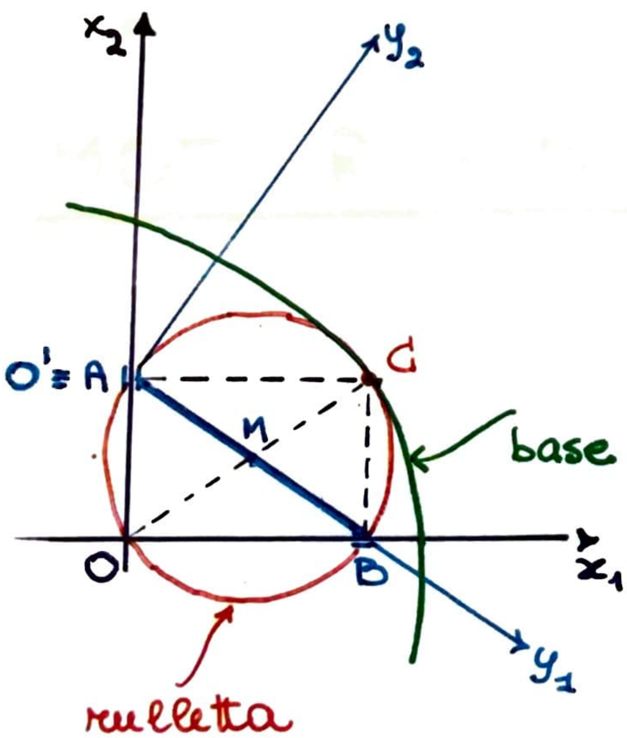
Per il th. di Chasles il centro istantaneo di rotazione C si ottiene dall'intersezione delle normali per A e per H.

Def: Chiamiamo **base** il luogo dei punti occupati dal centro istantaneo C durante il moto del sistema rispetto all'osservatore fisso Ox_1x_2.

Chiamiamo **rulletta** il luogo dei punti occupati dal centro istantaneo C durante il moto del sistema rispetto all'osservatore mobile $O'y_1y_2$.

La base e la rulletta sono dette **traiettorie polari**.

Esempio



Asta $\overline{AB}$ con gli estremi A e B vincolati a scorrere su Ox_1, Ox_2.

Ox_1x_2 rif. fisso

$O'y_1y_2$ rif. mobile

base = circonferenza di centro O e raggio $R = \overline{OC} = \overline{AB}$;

rulletta = circonferenza di diametro $2r = \overline{AB}$.

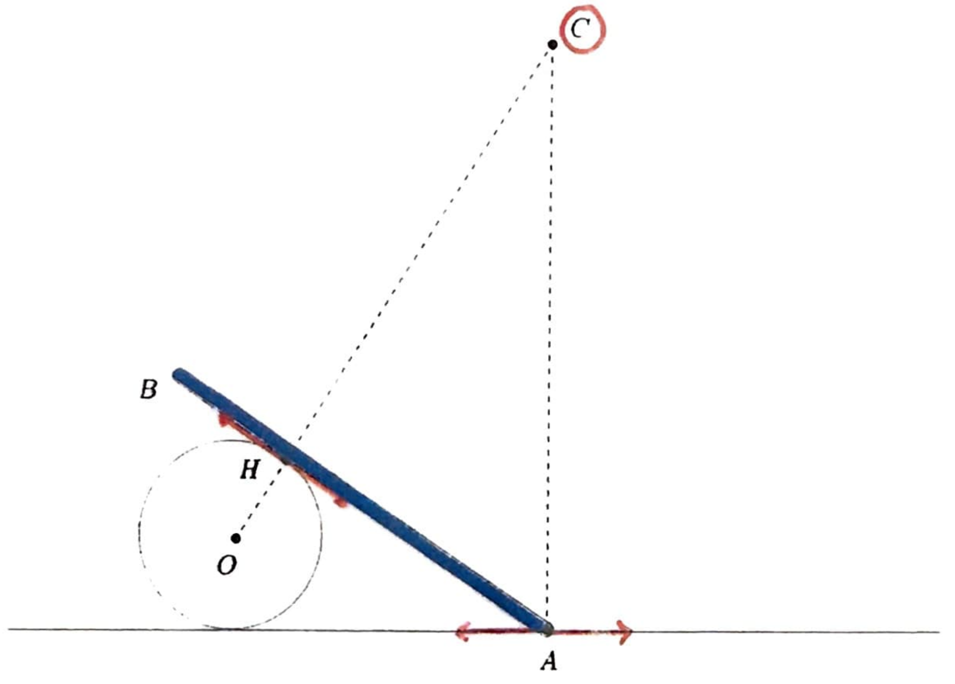


Figura 1.27

DEFINIZIONE Il luogo dei punti occupati dal centro istantaneo, durante il moto del sistema rispetto al riferimento fisso (O, x_1, x_2) viene chiamato *base*. Il luogo dei punti occupati dal centro istantaneo, durante il moto del sistema rispetto al riferimento mobile (O', y_1, y_2) è detto *rulletta*. La base e la rulletta nel loro insieme vengono chiamate *traiettorie polari*.

$\overline{AB} = L$

$C = (L\sin\theta,\ L\cos\theta)$

$O\hat{B}A = \theta$

$x_c^2 + y_c^2 = L^2$ base

$\left(x_c'-\frac{L}{2}\right)^2 + {y_c'}^2 = \frac{L^2}{4}$

rulletta

$x_c' = \frac{L}{2} + \frac{L}{2}\cos(\pi - 2\theta)$

$y_c' = \frac{L}{2}\sin(\pi - 2\theta)$

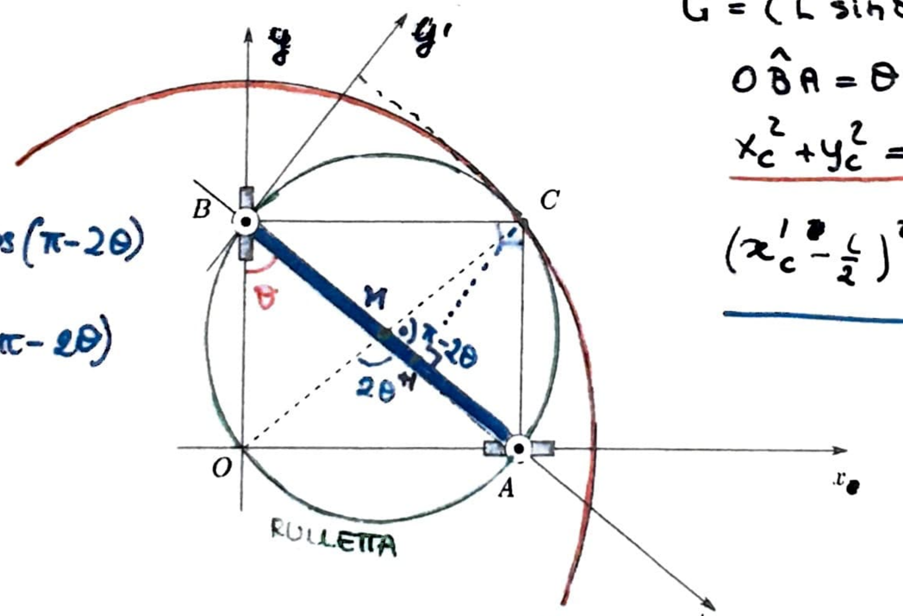
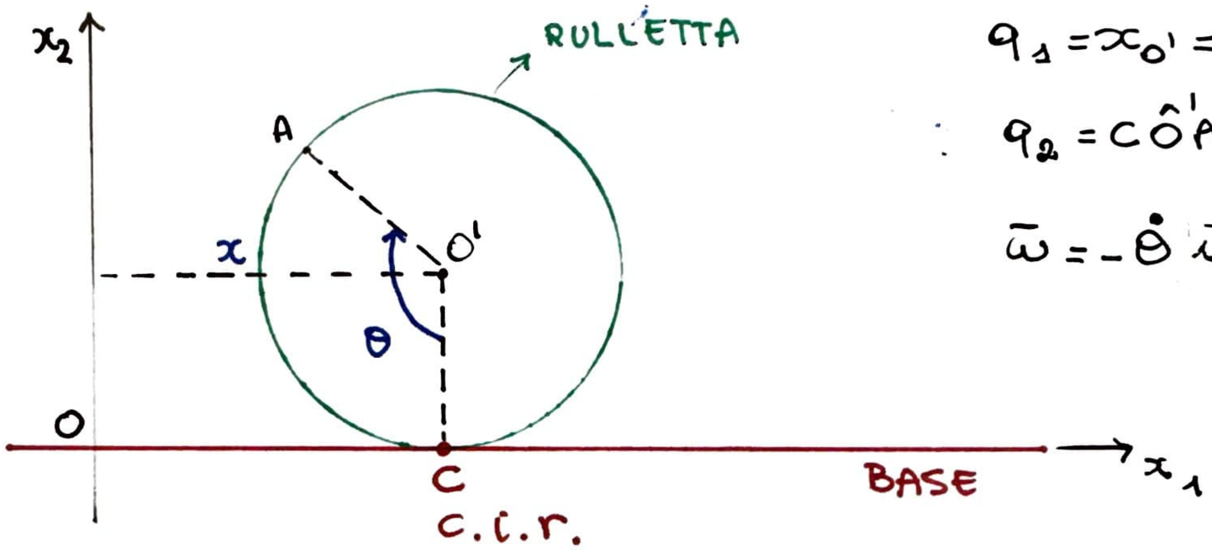


Figura 1.28

In generale la rulletta e la base sono due curve, rispettivamente solidale con il piano O, x_1, x_2 e col piano O', y_1, y_2. Un significativo esempio in tal senso ci viene dallo studio del moto rappresentato nella figura 1.2[illegible]. Rispetto al riferimento fisso

Esempio : Disco che rotola senza strisciare su una
(*) guida rettilinea
(pag. 49 libro di testo)



$q_1 = x_{O'} = x$

$q_2 = C\hat{O'}A = \theta$

$\bar{\omega} = -\dot{\theta}\,\vec{i}_3$

Legame tra x e θ

$O'(x, R) \Rightarrow \bar{v}_{O'} = \dot{x}\,\vec{i}$

ma anche

$$\bar{v}_{O'} = \underbrace{\bar{v}_C}_{= 0} + \bar{\omega} \times (O' - C) = -\dot{\theta}\,\bar{i}_3 \times R\,\bar{i}_2 = R\dot{\theta}\,\bar{i}_1$$

Pertanto $\dot{x} = R\dot{\theta}$ VINCOLO DI ROTOLAMENTO SENZA STRISCIAMENTO

Tale relazione è integrabile

$$x - x_0 = R(\theta - \theta_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = R\theta + \text{costante}}$$ VINCOLO OLONOMO

è possibile in base alle c.i. far sì che la costante sia uguale a zero.

IL DISCO CHE ROTOLA SENZA STRISCIARE HA UN SOLO GRADO DI LIBERTÀ.

Teorema. Durante il moto la rulletta rotola senza strisciare sulla base. La base e la rulletta sono l'unica coppia di curve solidali rispettivamente con Ox_1x_2 ed $O'y_1y_2$ che godono di tale proprietà.

Dim: Ad ogni istante base e rulletta hanno in comune il punto C. La $\bar{v}_\tau(C)$ del punto della figura mobile che coincide con C è nulla (poichè C è il centro ist. di rot.) Dal th. di composizione delle velocità, si ha:

$$\bar{v}_a(C) = \bar{v}_r(C)$$

cioè $\bar{v}_a$, $\bar{v}_r$ sono tangenti in C alla base e alla rulletta $\Rightarrow$ base e rulletta sono tangenti fra loro $\Rightarrow$ rulletta rotola sulla base.

Poichè $\bar{v}_\tau(C) = \bar{0}$ la velocità di strisciamento è nulla $\Rightarrow$ rulletta rotola senza strisciare sulla base.

L'unicità del punto C garantisce l'unicità della base e della rulletta. ▪ (*)

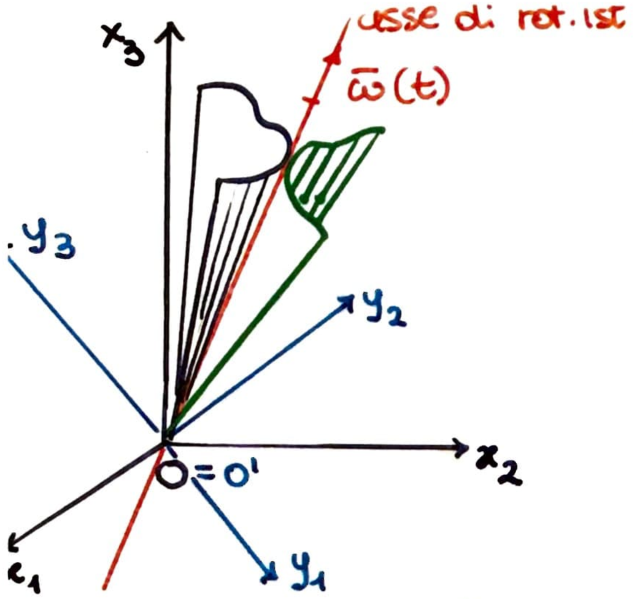
MOTI RIGIDI SFERICI

Quando un corpo rigido si muove in modo che un suo punto O' si mantiene fisso allora $\boxed{\bar{v}_{O'} = \bar{0}}$ e per la f.f.c. si ha:

$$\bar{v}_P(t) = \bar{\omega}(t) \times (P - O')$$

cioè l'atto di moto, ad ogni istante, è di rotazione con asse di istantanea rotazione passante per O'.

In generale il moto non è di rotazione perchè il vettore $\bar{\omega}(t)$ varia in direzione.



$Ox_1x_2x_3$ rif. fisso

$O'y_1y_2y_3$ rif. mobile solidale con $\mathcal{B}$

Poichè O' è fisso $\Rightarrow O' \equiv O$.

L'asse di istantanea rotazione (supporto di $\bar{\omega}(t)$) varia in direzione sia rispetto ad $Ox_1x_2x_3$ che rispetto ad $O'y_1y_2y_3$.

Al variare del tempo l'asse descrive due coni, uno fisso (solidale con $Ox_1x_2x_3$) ed uno mobile (solidale con $Oy_1y_2y_3$) entrambi di vertice O che rotolano senza strisciare l'uno sull'altro e la generatrice che hanno in comune, ad ogni istante, è l'asse di istantanea rotazione. Tali coni sono detti CONI DI POINSOT.
Intersecando tali coni con una sfera di centro O e raggio arbitrario si ottengono 2 curve che, a parte il fatto di giacere su una superficie sferica anzichè su un piano, hanno le stesse proprietà della base e della rulletta.

MOTO DI PRECESSIONE

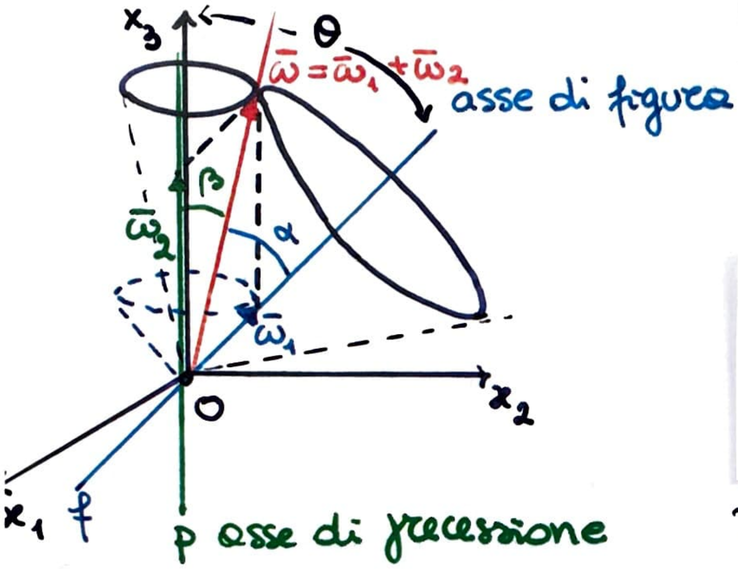
Supponiamo che per un corpo rigido con punto fisso l'atto di moto sia dato dalla somma di due atti di moto di rotazione:

$$\bar{v}_P = \bar{\omega}_1 \times (P-O) + \bar{\omega}_2 \times (P-O) = (\overbrace{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}^{=\bar{\omega}}) \times (P-O)$$

dove $\bar{\omega}_1$ è diretto secondo una retta f passante per O e solidale col corpo, detta asse di figura ed $\bar{\omega}_2$ è diretto secondo una retta p passante per O

e fissa nel rif. $Ox_1x_2x_3$, detta asse di precessione.

Quando $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ sono costanti in modulo ed è costante anche l'angolo θ tra $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$, il moto è detto di $\boxed{\text{precessione regolare}}$



$$\bar{v}_{P^*} = \bar{\omega}_2 \times (P^* - O)$$

cioè l'asse f ruota attorno all'asse p, per i punti $P^* \in f$, asse di figura.

$\bar{\omega}_1 \times (P^* - O) = \bar{0}$ perchè $\parallel$

Detti α, β gli angoli che $\bar{\omega}$ forma con $\bar{\omega}_1$ ed $\bar{\omega}_2$, poichè $|\bar{\omega}| = cost$ segue che $\alpha = cost$, $\beta = cost$.

L'asse di rotazione istantanea ruota rispetto al rif. fisso $Ox_1x_2x_3$ attorno alla direzione di $\bar{\omega}_2$ e ruota rispetto ad un rif. solidale con B $Oy_1y_2y_3$ attorno alla direzione di $\bar{\omega}_1$.

I due coni di Poinsot sono rotondi ed hanno come assi l'asse di precessione e l'asse di figura.