DINAMICA DEI SISTEMI

PRINCIPI FONDAMENTALI

La Meccanica classica è una teoria del moto che stabilisce relazioni tra le grandezze cinematiche e nuove grandezze: la massa e la forza. Tali relazioni sono espresse da LEGGI, POSTULATI o PRINCIPI di carattere generale (teoria assiomatica).

MASSA: grandezza fisica PRIMITIVA (non viene definita) legata alla "quantità di materia" associata al corpo. L'ente matematico in grado di descriverla è un numero reale non negativo

$$\boxed{m \geq 0 \quad , m \in \mathbb{R}}$$

Le sue proprietà sono:

- INVARIABILITÀ, cioè la massa è indipendente dal moto e dal tempo;
- ADDITIVITÀ, cioè la massa di un sistema di corpi è uguale alla somma delle masse dei suoi componenti.

FORZA: grandezza fisica PRIMITIVA associata ad ogni azione meccanica in grado di modificare lo stato di quiete o di moto di trasla=

zione rettilinea ed uniforme di un corpo.
Se l'azione meccanica è esercitata da altri corpi ed è indipendente dall'osservatore la forza è detta FORZA ASSOLUTA.
L'ente matematico in grado di descriverla è:

$$\boxed{(A, \vec{F}) \quad A \in \mathcal{E}, \ \vec{F} \in \mathbb{V}}$$

A: punto di applicazione della forza
$\vec{F}$: vettore rappresentativo della direzione, verso e intensità della forza.
Le forze godono delle proprietà dei vettori applicati

LEGGI DI NEWTON (classiche)

N.B. Si suppone che il punto materiale sia LIBERO.

PRIMA LEGGE Esiste un osservatore, detto inerziale (o galileiano), rispetto al quale un punto materiale isolato (quindi non soggetto a forze assolute) permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Esempi: In natura esistono osservatori che solo in buona approssimazione sono inerziali:
- l'osservatore stellare, solidale con le stelle fisse
- l'osservatore terrestre - stellare, con origine nel centro della terra e assi diretti secondo le stelle fisse (è lecito nello studio di fenomeni che avvengono sulla superficie terrestre).

SECONDA LEGGE Il moto di un punto materiale P, rispetto ad un osservatore inerziale è tale che

$$\boxed{m\,\vec{a} = \vec{F}}$$

con

m: massa del punto materiale P

$\vec{a}$: accelerazione istantanea di P

$(P, \vec{F})$: forza risultante di tutte le azioni meccaniche che agiscono sul punto P.

POSTULATO sulla dipendenza di $\vec{F}$ dalle grandezze cinematiche.

La più generale dipendenza di $\vec{F}$ dalle variabili cinematiche è:

$$\boxed{\vec{F}(t) = \hat{\vec{f}}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)}$$

dove $\vec{x}(t)$ rappresenta il MOTO di P.

Quindi si ottiene:

$$\boxed{m\,\ddot{\vec{x}}(t) = \hat{\vec{f}}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)}$$

eq. differenziale del 2° ordine, in forma normale che, associata alle condizioni iniziali sulla posizion e la velocità del punto, ci permette di PREDIRE IL MOTO in modo UNIVOCO.

Per i SISTEMI DI PUNTI MATERIALI (P_s, m_s) $s = 1, \dots, N$ si ha:

$$m_s\,\vec{a}_s = \vec{F}_s$$

$$\vec{F}_s(t) = \hat{\vec{f}}_s(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t); \dot{\vec{x}}_1(t), \dots, \dot{\vec{x}}_N(t), t)$$

perciò, per ogni punto (P_s, m_s) vale:

$$\boxed{m_s \ddot{\vec{x}}_s(t) = \hat{\mathcal{F}}_s(\vec{x}_1(t), .., \vec{x}_N(t); \dot{\vec{x}}_1(t), ..., \dot{\vec{x}}_N(t), t)}$$

$s = 1, ..$

sistema di N eq. diff. del 2° ordine in forma normal.

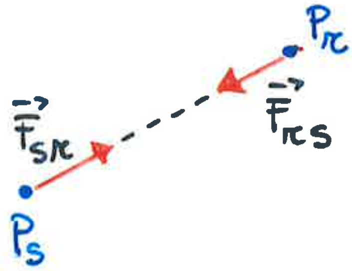
dove l'N-pla $(\vec{x}_1(t), ..., \vec{x}_N(t))$ rappresenta il MOTO del SISTEMA.

TERZA LEGGE Se in un sistema materiale di punti (P_s, m_s) $s = 1, ..., N$ indichiamo

$(P_s, \vec{F}_{sr})$: forza agente sul punto P_s dovuta alle azio meccaniche esercitate da P_r

$(P_r, \vec{F}_{rs})$: forza agente su P_r dovuta a P_s

allora



COPPIA DI BRACCIO NULLO

ed in particolare risulta $\boxed{\vec{F}_{sr} = -\vec{F}_{rs}}$: PRINCIPIO AZIONE/REAZI

La struttura dell' equazione

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t); \dot{\vec{x}}(t), t)$$

rimane invariata anche rispetto ad un osservatore non inerziale. In base al teorema di composizione delle accelerazioni:

$$m\ddot{\vec{a}}_r = \underbrace{\vec{F} - m\vec{a}_\tau - m\vec{a}_c}_{\vec{F}_r}$$

si ha:

$$m\ddot{\vec{x}}_r = \vec{F}_r(\vec{x}_r, \dot{\vec{x}}_r, t)$$

$\vec{F}_\tau = -m\bar{a}_\tau$ forza di trascinamento

$\vec{F}_c = -m\bar{a}_c$ forza di Coriolis

Tali forze vengono chiamate forze apparenti perchè non dovute alla presenza di altri corpi.

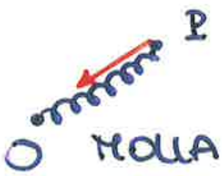
Teorema (Principio di relatività galileiana)

Ogni osservatore che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad un osservatore inerziale è anch'esso inerziale.

ESEMPI DI FORZE COSTITUTIVE

FORZE POSIZIONALI : $\vec{F} = \hat{\vec{F}}(\vec{x})$

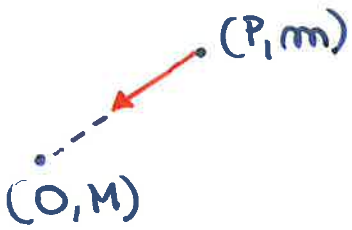
a) FORZA ELASTICA (ideale)



$(P, \vec{F})$ con $\vec{F} = -k(P-O) = -k\vec{x}$, $k>0$

MOLLA IDEALE (lunghezza a riposo nulla)

b) FORZA DI ATTRAZIONE NEWTONIANA

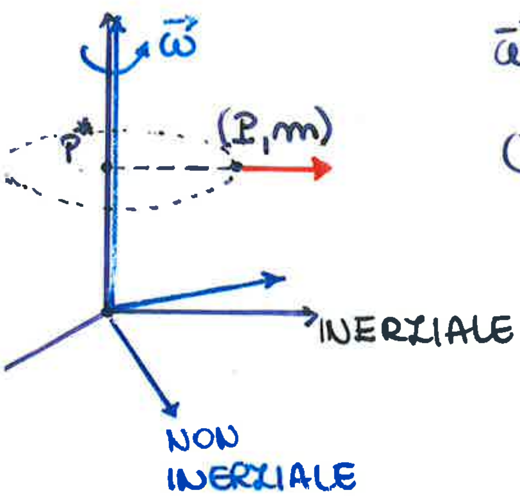


$(P, \vec{F})$ con $\vec{F} = -k \dfrac{mM}{r^2} \operatorname{vers}(P-O)$

$r = |P-O|$

$k>0$ costante di gravitazione universale

c) FORZA CENTRIFUGA (in osservatori non inerziali)



$\vec{\omega} = \text{costante} \Rightarrow \vec{a}_\tau = -\omega^2 (P - P^*)$

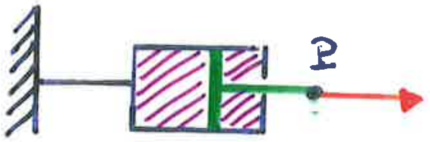
$(P, \vec{F})$ con $\vec{F} = m\omega^2 (P - P^*)$

FORZE DIPENDENTI ANCHE DALLA VELOCITÀ : $\vec{F} = \hat{\vec{F}}(\vec{x}, \vec{v})$

a) FORZA VISCOSA (f. resistente di tipo viscoso)

$(P, \vec{F})$ con $\vec{F} = -\lambda m \vec{v}$, $\lambda > 0$ m: massa di P.

la forza ha una legge che è lineare in $\vec{v}$ ed è realizzata da un meccanismo detto SMORZATORE IDEALE



b) FORZA IDRAULICA (f. resistente di tipo idraulico)

$(P, \vec{F})$ con $\vec{F} = -\lambda m |\vec{v}| \vec{v}$, $\lambda > 0$

che ha una legge quadratica in $\vec{v}$

c) FORZA DI LORENTZ

$(P, \vec{F})$ con $\vec{F} = e \vec{v} \times \vec{B}$ e: carica elettrica puntiforme

B: campo magnetico costante

d) FORZA DI CORIOLIS (in osservatori non inerziali)

$(P, \vec{F})$ con $\vec{F} = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}_r$

Una forza che spesso si considera nelle esperienze di laboratorio (osservatore terrestre) è la FORZA PESO.

Def: Chiamiamo forza peso $\vec{P}$ agente su un punto materiale (P, m), in quiete rispetto ad un osservatore terrestre, la somma della forza di attrazione newtoniana e della forza di trascinamento dovuta alla rotazione terrestre attorno al proprio asse.

Da $\vec{f}_r = \vec{f} + \vec{F}_\tau + \vec{F}_c$

$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \underset{\overset{\parallel}{\vec{0}}}{\vec{v}_r} \equiv \vec{0}$ (in quiete relativa) $\Rightarrow (\vec{v}_r = \vec{0})$

$\vec{F}_\tau = m\omega^2 (P - P^*)$ ($\vec{\omega}$ è costante) forza centrifuga

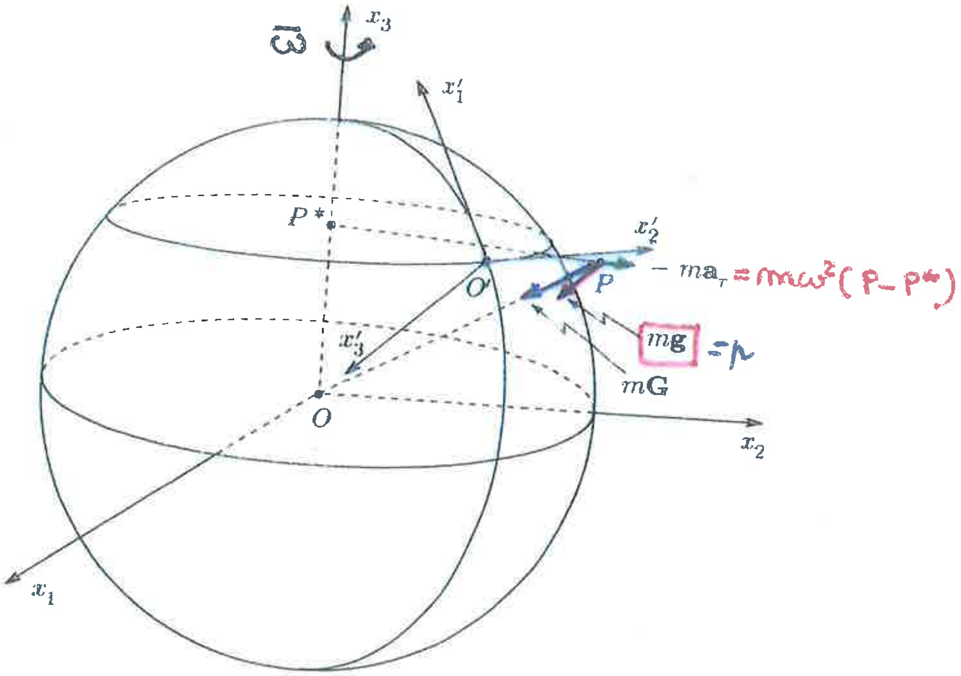
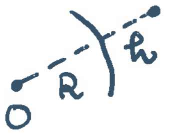


Figura 2.2

$$\vec{F} = -\frac{k\,m\,M}{P\;R^2}\,\text{vers}(P-O) = m\left(-k\frac{M}{R^2}\,\text{vers}(P-O)\right) = m\vec{G}$$

$\vec{G}$ = costante



$R + h \sim R$

Se trascuriamo il moto di precessione della Terra rispetto ad $Ox_1x_2x_3$ (asse di figura ruota attorno all'asse di precessione e compie un giro in 25000 anni)

$\bar{a}_\tau = -\omega^2(P-P^*)$

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = m\vec{G} + m\omega^2(P-P^*) = m\vec{g}$$

$\vec{g} = \vec{G} + \omega^2(P-P^*)$ accelerazione di gravità

La direzione della forza peso, chiamata verticale, non coincide con la direzione del raggio terrestre se non ai poli o all'equatore.

mediamente $|\vec{g}| \approx 9,8\ m/s^2$

TEOREMA DELLE FORZE VIVE PER UN SISTEMA MATERIALE LIBERO

Dato un sistema materiale (P_s, m_s), $s = 1, \dots, N$ consideriamo le relative equazioni di moto:

$$m_s \dot{\vec{v}}_s(t) = \vec{\mathcal{F}}_s(x(t), \dot{x}(t), t) \quad s = 1, \dots, N$$

dove

$$x = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

$$\dot{x} = (\dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_N)$$

Moltiplicando ogni equazione per il relativo spostamento elementare $dP_s = \vec{v}_s \, dt$:

$$\begin{cases} m_1 \dot{\vec{v}}_1 \cdot \vec{v}_1 \, dt = \vec{\mathcal{F}}_1 \cdot \vec{v}_1 \, dt \\ \vdots \\ m_N \dot{\vec{v}}_N \cdot \vec{v}_N \, dt = \vec{\mathcal{F}}_N \cdot \vec{v}_N \, dt \end{cases}$$

e poi sommando in s:

$$\sum_{s=1}^{N} m_s \dot{\vec{v}}_s \cdot \vec{v}_s \, dt = \sum_{s=1}^{N} \vec{\mathcal{F}}_s \cdot \vec{v}_s \, dt$$

Def: Chiamiamo **energia cinetica** del sistema materiale (P_s, m_s) $s = 1, \dots, N$ all'istante t la grandezza scalare

$$\boxed{T(t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s |\vec{v}_s(t)|^2}$$

Chiamiamo **lavoro elementare** compiuto sul sistema materiale dal sistema di forze $(P_s, \bar{F}_s)$ $s=1,\dots,N$ nell'intervallo $[t, t+dt]$ lo scalare:

$$\boxed{dL = \sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s \cdot \bar{v}_s\, dt = \sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s \cdot dP_s = \sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s \cdot d\bar{x}_s}$$

Chiamiamo **potenza** all'istante t lo scalare

$$\mathcal{P}(t) = \sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s(t) \cdot \bar{v}_s(t)$$

così che

$$\boxed{dL = \mathcal{P}(t)\, dt}$$

Teorema delle forze vive

Durante il moto del sistema materiale libero (P_s, m_s) $s=1,\dots,N$ si ha:

$$dT = dL$$

dove dT è il differenziale dell'energia cinetica.

Derivando rispetto al tempo l'energia cinetica T

$$\frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s v_s^2\right) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \frac{d}{dt} v_s^2$$

$$v_s^2 = \bar{v}_s \cdot \bar{v}_s$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s\, 2\bar{v}_s \cdot \frac{d\bar{v}_s}{dt}$$

$$= \sum_{s=1}^{N} m_s\, \bar{v}_s \cdot \dot{\bar{v}}_s$$

$$dT = \sum_{s=1}^{N} m_s \dot{\bar{v}}_s \cdot \bar{v}_s\, dt = \sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s \cdot \bar{v}_s\, dt = dL$$

o anche $\frac{dT}{dt} = \mathcal{P}$

Def : Un sistema di forze posizionali (o costanti) $(P_s, \vec{F}_s)$ $s = 1, \dots, N$ è detto **CONSERVATIVO** su $\Omega^N \subset \mathbb{R}^{3N}$ se esiste una funzione

$$\mathcal{U} : \Omega^N \to \mathbb{R}$$

detta **POTENZIALE**, differenziabile su Ω^N tale che

$$d\mathcal{U} = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s(x) \cdot d\vec{x}_s = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s(x) \cdot dP_s$$

o equivalentemente

$$F_{s_i} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_{s_i}} \qquad i = 1, 2, 3$$

o anche

$$\vec{F}_s(x) = \nabla_{x_s} \mathcal{U} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_{s1}} \bar{\imath}_1 + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_{s2}} \bar{\imath}_2 + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_{s3}} \bar{\imath}_3$$

dove $\nabla_{x_s} \mathcal{U}$ è il **gradiente** di $\mathcal{U}$.

Vale il seguente

Teorema: Se $\{\vec{F}_s(x)\}$ è un sistema di forze posizionali continue in Ω^N, C. N. S. affinchè $\{\vec{F}_s(x)\}$ sia conservativo è che

$$dL = \oint_c \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s(x) \cdot d\vec{x}_s = 0$$

lungo ogni curva chiusa e contenuta tutta in Ω^N.

Def : Una forza $\vec{F}(t)$ è detta **resistente** se

$$dL = \vec{F}(t) \cdot \underbrace{v(t)dt}_{d\bar{x}} < 0 \qquad \forall t \in I$$

(esempio : la forza viscosa $\vec{F} = -h\vec{v}$, $h > 0$)

Teorema di conservazione dell'energia meccanica

Se le forze agenti su un sistema materiale libero sono conservative (posizionali e costanti) con potenziale U allora:

$$T(t) - U(t) = E$$

dove $E = T_0 - U_0 = T(t_0) - U(t_0)$.

Infatti da:

$$dT = dL \quad e \quad dL = dU$$

si ha

$$dT = dU \implies d(T-U) = 0$$
$$\implies T - U = \text{costante}$$

Detto $V = -U$ l'energia potenziale del sistema di forze si ha:

$$T(t) + V(t) = E$$

cioè la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale si mantiene uguale ad una costante E detta ENERGIA MECCANICA TOTALE

QUANTITÀ MECCANICHE PER UN PTO MAT.

Def: Chiamiamo quantità di moto $\vec{Q}$ di un pto materiale (P, m) il vettore:

$$\boxed{\vec{Q} = m\vec{v}}$$

Chiamiamo momento della quantità di moto $\vec{K}_O$ rispetto ad un polo O di un punto materiale (P, m) il vettore:

$$\boxed{\vec{K}_O = m\vec{v} \times (O-P)}$$

N.B. Per il solo pto mat. $\vec{K}_O = \vec{Q} \times (O-P)$ ma tale scrittura è ERRATA per sistemi di più punti materiali.

Teorema della quantità di moto

Per un punto materiale libero (P, m), soggetto alla forza risultante $(P, \hat{\mathcal{F}}(\vec{x}, \vec{v}, t))$, durante il moto si ha:

$$\frac{d}{dt}\vec{Q}(t) = \hat{\mathcal{F}}(\vec{x}, \vec{v}, t) \qquad (*)$$

Dim: Il moto di (P, m) è governato dall'equazione fondamentale:

$$m\dot{\vec{v}}(t) = \hat{\mathcal{F}}(\vec{x}(t), \vec{v}(t), t) \, .$$

Poiché m è costante (durante il moto) segue

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{Q} \; ■$$

Se integriamo rispetto al tempo, lungo un processo v^P che parte dallo stato σ_0 la $(*)$ si ha:

$$\vec{Q}_f - \vec{Q}_i = \int_0^{d_P} \hat{\mathcal{F}}(\vec{x}, \vec{v}, t)\, dt = \int_0^{d_P} \hat{\mathcal{F}}(\sigma_t, v^P(t), t)\, dt$$

Se chiamiamo impulso della forza $\hat{\mathcal{F}}$ nell'intervallo $(0, d_P)$ l'integrale a 2° membro si ha

Osservazione: La variazione della quantità di moto di un punto materiale libero relativa ad un assegnato processo è uguale all'impulso della forza risultante corrispondente allo stesso processo.

Teorema del momento della quantità di moto

Per un punto materiale libero (P, m), soggetto alla forza risultante $(P, \hat{\mathcal{F}})$, durante il moto risulta:

$$\frac{d}{dt}\vec{K}_0(t) = \vec{\Omega}_0(\vec{x}, \vec{v}, t)$$

dove O è un punto fisso e

$$\vec{\Omega}_0 = \hat{\mathcal{F}} \times (O-P)$$ momento risultante di tutte le forze agenti su P

Dim: Moltiplicando l'EQ. FONDAMENTALE per $(O-P)$ vettorialmente a destra si ha:

$$m\dot{\vec{v}} \times (O-P) = \hat{\mathcal{F}} \times (O-P)$$

Poichè $m\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ e

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) \times (O-P) = \frac{d}{dt}\left[m\vec{v} \times (O-P)\right] - \underbrace{m\vec{v} \times \overbrace{\frac{d}{dt}(O-P)}^{-\vec{v}}}_{=\vec{0}} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[m\vec{v} \times (O-P)\right] = \frac{d}{dt}\vec{K}_0$$

segue la tesi ■

Teorema del momento assiale della quantità di moto

Per un punto materiale libero (P, m), soggetto alla forza risultante $(P, \vec{F})$, durante il moto risulta:

$$\frac{d}{dt} K_u = \Omega_u (\vec{x}, \vec{v}, t)$$

dove u è una retta fissa orientata passante per O di versore $\vec{u}$.

Dim: Basta proiettare lungo l'asse u di versore $\vec{u}$ l'eq. vettoriale del th. del M.Q.M. dove $K_u = \vec{K}_0 \cdot \vec{u}$ è detto momento assiale della quantità di moto.

Osservazione. I tre teoremi sono una facile conseguenza dell' eq. fondamentale della dinamica e pertanto non sono in grado di fornire nuove informazioni sul moto del punto materiale, ma risultano utili, come il teorema delle forze vive, per stabilire direttamente alcune proprietà del moto, come la conservazione delle quantità di moto o del momento della quantità di moto.