STATICA E DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE LIBERO

Abbiamo visto che l'eq. fondamentale del moto del punto libero è:

(1) $$\boxed{m\ddot{\vec{x}} = \hat{\mathcal{F}}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}$$

dove $(P, \hat{\mathcal{F}})$ è la forza risultante di tutte le azioni meccaniche esercitate su P. Se alla (1) si associano le condizioni iniziali (stato dinamico del sistema meccanico all'istante t_0) cioè:

(2) $$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad , \quad \dot{\vec{x}}(t_0) = \vec{v}_0$$

è possibile determinare univocamente il moto.

Teorema di Cauchy

Se la funzione $\hat{\mathcal{F}} : A \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è continua sull'aperto A ed è lipschitziana rispetto ad $\vec{x}$ e $\vec{v}$ allora per ogni $(\vec{x}_0, \vec{v}_0, t) \in A$ esiste una ed una sola soluzione $\vec{x} : I \to \mathbb{R}^3$ dove $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, è l'intervallo di esistenza, che verifica (1) e (2).

Dim: vedi Corso di Analisi: (1) si trasforma in un sistema del 1° ordine:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = \frac{1}{m} \hat{\mathcal{F}}(\vec{x}, \vec{v}, t) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

Def. Chiamiamo integrale primo di moto per (1) una equazione differenziale del 1° ordine del tipo:

$$(3) \qquad \boxed{\varphi(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) = cost} \quad , \forall t \in I$$

che risulta conseguenza di (1), cioè tale che ogni soluzione di (1) è anche soluzione di (3).

La costante a secondo membro è determinata dalle condizioni iniziali, cioè

$$cost = \varphi(\vec{x}_0, \vec{v}_0, t_0)$$

Osservazione: Gli integrali primi non danno informazioni in più rispetto alla (1), essendone conseguenza, ma sono del PRIMO ordine anziché del SECONDO e ciò ne agevola l'integrazione (cioè la soluzione).

Esempi

1) Nell'ipotesi per cui sussiste, il teorema di conservazione dell'energia meccanica è un esempio di integrale primo di moto. Infatti

$$\boxed{\frac{1}{2} m \, \dot{\vec{x}}^2(t) - \mathcal{U}(\vec{x}(t)) = E}$$

è un'eq. diff. (non lineare) del 1° ordine ed è conseguenza di (1).

2) Nell'ipotesi che (P, m) sia soggetto ad una forza $(P, \vec{F})$ di tipo centrale, cioè:

$$\vec{F}(\vec{x}) = f(\rho)\, \vec{r}$$

con $\rho = |P - O|$, $r = vers(P - O)$, O punto fisso

allora sussiste l'integrale primo di moto:

(4) $$\boxed{\vec{K}_o(t) = m\,\vec{x}'(t) \times \dot{\vec{x}}(t) = \overrightarrow{cost}}$$

Infatti, poichè $\vec{F}$ è centrale $\vec{\Omega}_o = \vec{F} \times (O-P) \equiv \bar{o}$ e quindi

$$\frac{d}{dt}\vec{K}_o = \vec{\Omega}_o = \vec{o}$$

quindi

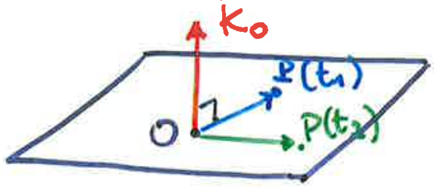
$$\frac{d}{dt}\left[m\vec{v} \times (O-P)\right] = \frac{d}{dt}\left[m\,\dot{\vec{x}}(t) \times \{-\vec{x}(t)\}\right] = \bar{o}$$

Teorema: Il moto di un punto (P, m) soggetto solo ad una forza di tipo centrale è piano e la sua velocità areale è costante.

Dim: Segue dall'integrale primo di moto (4). Infatti essendo $\vec{K}_o$ costante in direzione si ha:

$$\vec{K}_o \cdot (P-O) = m\vec{v} \times (O-P) \cdot (P-O) = 0$$

quindi se $\vec{K}_o \neq \vec{o} \Rightarrow (P, m)$ appartiene sempre



al piano passante per O e perpendicolare a $\vec{K}_o$.

- Se $\vec{K}_o = \vec{o} \Rightarrow m\vec{v} \times (O-P) = \vec{o}$ cioè $(P-O)$ è sempre diretto come $\vec{v}$ e quindi il moto è rettilineo (caso particolare)

Infine, essendo $\vec{K}_o$ costante anche in modulo ed essendo il moto piano, abbiamo

$$\vec{K}_o = -m\left(\dot{\rho}\,\vec{e} + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{h}\right) \times \rho\,\vec{e} = m\,\rho^2\,\dot{\theta}\,\vec{e} \times \vec{h}$$

da cui

$$|\vec{K}_o| = m\rho^2|\dot{\theta}| = \text{costante}$$

pertanto la velocità areale è costante

$$\boxed{\dot{A} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = c}$$ c = costante delle aree

N.B. Se $\vec{F}$ è centrale, per la (1), $\vec{a} \parallel (P-O)$ dunque il moto è centrale.

Def: Una posizione $\vec{x}_e \in \mathbb{R}^3$ è detta di equilibrio per (P,m) soggetto a $(P,\hat{\mathcal{F}})$ se posto P nella posizione $\vec{x}_e$ con velocità iniziale nulla il moto corrispondente è la quiete:

(5) $$\boxed{\vec{x}(t) = \vec{x}_e \qquad \forall t \geq t_0}$$

Teorema. C.N.S. affinché $\vec{x}_e$ sia di equilibrio per (P,m) soggetto a $(P,\hat{\mathcal{F}})$ è che

(6) $$\hat{\mathcal{F}}(\vec{x}_e, \vec{0}, t) = \vec{0} \qquad \forall t \geq t_0$$

Dim: Se $\vec{x}_e$ è di equilibrio, allora per (5) segue ovviamente (6) in virtù dell'eq. fond. (1).

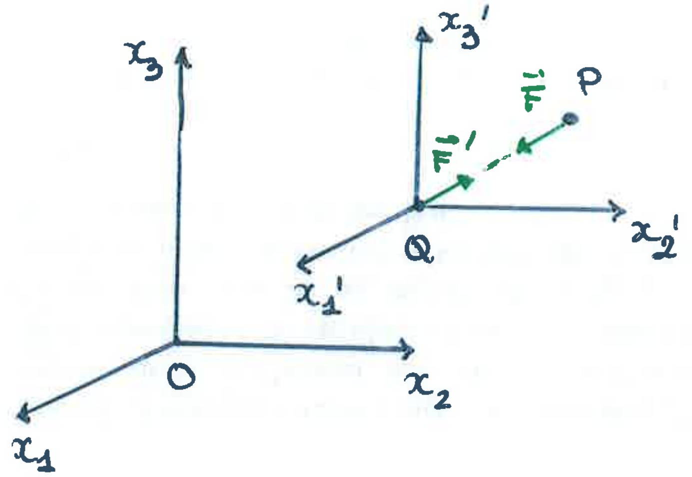
Viceversa, se vale (6) allora $\forall t \geq t_0$ la funzione (5) (quiete) è soluzione (UNICA) di (1) per condizioni iniziali

$$\vec{x}_0 = \vec{x}_e \quad , \quad \vec{v}_0 = \vec{0}$$

Dunque il moto possibile è solo la quiete. ∎

PROBLEMA DEI DUE CORPI

Rappresenta lo studio del moto di due punti materiali (P, m) e (Q, M) soggetti ognuno ad una forza di tipo newtoniano.



$$\begin{cases} m\,\bar a_P = m\,\ddot{\vec x}_P = \vec F & \vec x_P = (P-O) \\ M\,\bar a_Q = M\,\ddot{\vec x}_Q = \vec F' = -\vec F & \vec x_Q = (Q-O) \end{cases}$$

$$\vec F = -k\,\frac{mM}{|P-Q|^3}\,(P-Q)$$

Vogliamo studiare il moto di P rispetto ad un osservatore posto in Q, origine del riferimento (Q, x_1', x_2', x_3') con assi invariabili, paralleli a quelli del riferimento inerziale $O x_1 x_2 x_3$.

(esempio: moto dei pianeti attorno al Sole)

In (Q, x_1', x_2', x_3') il moto di P è descritto da:

$$m\,\bar a_r(P) = m\,\ddot{\vec x}_P{}' = \vec F - m\,\bar a_\tau(P) - m\,\bar a_c(P)$$

dove $\vec x_P{}' = (P-Q)$

Poichè il riferimento relativo trasla rispetto al riferimento inerziale

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = \bar{0} \qquad \text{perchè } \vec{\omega} = \vec{0}$$

$$\bar{a}_\tau = \vec{a}_Q = \ddot{\vec{x}}_Q = -\frac{\vec{F}}{M}$$

quindi:

$$m\ddot{\vec{x}}'_P = F + \frac{m}{M}\vec{F} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\vec{F} = \left(\frac{M+m}{M}\right)\vec{F}$$

cioè

$$\boxed{\frac{mM}{(m+M)}\ddot{\vec{x}}'_P = \vec{F}}$$

$\frac{mM}{m+M}$: massa ridotta

$$\frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1 + \frac{m}{M}} < m$$

se $\frac{m}{M} \ll 1$ allora $\frac{mM}{m+M} \approx m$.

N.B.: Poichè la forza $\vec{F}$ è una forza centrale, il moto di P rispetto all'osservatore (Q, x_1', x_2', x_3') è piano e la velocità areale rispetto a Q è costante.

Equivalente a:

<u>Seconda Legge di Keplero</u>

Le aree descritte dai raggi vettori sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.