STATICA E DINAMICA DEL PUNTO E DEI SISTEMI VINCOLATI

Un punto materiale è detto vincolato se il suo moto è limitato da vincoli olonomi e anolonomi. La presenza del vincolo modifica in maniera determinante il moto del punto, perciò il vincolo agisce come un'azione meccanica in grado di alterare il moto e deve essere interpretata come una forza che nasce dal contatto tra il punto e il vincolo. Tale forza viene chiamata reazione vincolare per distinguerla dalle altre forze (costitutive ed impresse) che verranno dette forze attive.

L'azione dei vincoli su un punto P verrà rappresentata da $(P, \vec{\Phi})$: reazione vincolare risultante agente su P.

PRINCIPIO DELLE REAZIONI VINCOLARI (1ª parte)

E' sempre possibile sostituire parte o tutti i vincoli di un sistema materiale con un opportuno sistema di reazioni vincolari $(P_s, \vec{\Phi}_s)$ $s=1,\dots,N$ senza alterare lo stato di quiete o di moto.

Il sistema di eq. fond. del moto per un sistema materiale vincolato è dunque:

$$\boxed{m_s \, \ddot{\vec{v}}_s(t) = \hat{\mathcal{F}}_s\left(x(t), v(t), t\right) + \vec{\phi}_s} \qquad s = 1, \dots, N$$

$x(t) = (x_1, \dots, x_n)$ n-pla di parametri per individuare la posizione del sistema

$v(t) = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$

n = grado di libertà

N.B. A differenza delle forze attive che sono delle funzioni dello stato del sistema o eventualmente come funzioni esplicite del tempo, le reazioni vincolari sono COMPLETAMENTE INCOGNITE E INDETERMINATE.

Ciò rende, in generale, impossibile la soluzione del sistema delle eq. del moto.

Per esempio, dato (P, m) vincolato a muoversi nel piano orizzontale $x_3 = 0$, si ha:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = \mathcal{F}_1(\vec{x}, \vec{v}, t) + \phi_1 \\ m\ddot{x}_2 = \mathcal{F}_2(\vec{x}, \vec{v}, t) + \phi_2 \\ m\ddot{x}_3 = \mathcal{F}_3(\vec{x}, \vec{v}, t) + \phi_3 \\ x_3 = 0 \quad \text{eq. vincolo} \end{cases} \quad \text{eq. del moto}$$

Si tratta di un sistema di 4 equazioni in 6 incognite: $x_1, x_2, x_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3$.

Per rendere possibile la soluzione bisogna introdurre un'ulteriore restrizione che riduca le incognite: 2ª parte del P.R.V.

Def. Chiamiamo velocità virtuale $\vec{v}_s'$ all'istante t di un punto P_s ogni velocità compatibile con i vincoli supposti fissi nell'istante considerato.

Chiamiamo lavoro virtuale δL all'istante t, relativo al sistema di forze $\{P_s, \vec{\mathcal{F}}_s(t)\}$ la quantità:

$$\boxed{\delta L = \sum_{s=1}^{N} \vec{\mathcal{F}}_s(t) \cdot \vec{v}_s'(t)\, dt}$$

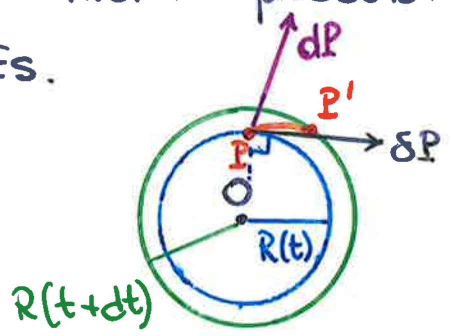
detto $\delta P_s = \delta \vec{x}_s = \vec{v}_s'\, dt$ spostamento virtuale, si ha:

$$\delta L = \sum_{s=1}^{N} \vec{\mathcal{F}}_s(t) \cdot \delta P_s$$

Osservazione

In generale δL non coincide con dL poiché gli spostamenti virtuali in generale non coincidono con gli spostamenti possibili.

Es.



$P = P(t)$

$P' = P(t+dt)$

$x^2 + y^2 = R^2(t)$ eq. vincolo reonomo

PRINCIPIO DELLE REAZIONI VINCOLARI (2ª parte)

Il lavoro virtuale delle reazioni vincolari è sempre non negativo, per ogni spostamento virtuale e qualunque sia la scelta dei vincoli che si decide sostituire con un sistema $\{P_s, \vec{\Phi}_s\}$, cioè:

$$\boxed{\delta L^{(v)} = \sum_{s=1}^{N} \vec{\phi}_s \cdot \delta P_s \geq 0} \quad \forall \delta P_s, \quad s=1,\dots,N$$

Def. Chiamiamo invertibile uno spostamento virtuale δP_s se anche $-\delta P_s$ è uno spostamento virtuale. (cioè se anche $-\vec{v}_s'$ è compatibile con i vincoli supposti fissi). Altrimenti lo spostamento δP_s è detto non invertibile.

Se δP_s è invertibile allora:

$$\boxed{\delta L^{(v)} = 0} \quad \forall\ \delta P_s \text{ invertibile}, \quad s=1,\dots,N$$

Infatti

$$\sum_{s=1}^{N} \vec{\phi}_s \cdot \delta P_s \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{s=1}^{N} \vec{\phi}_s \cdot (-\delta P_s) \geq 0$$

da cui

$$\sum_{s=1}^{N} \vec{\phi}_s \cdot \delta P_s = 0$$

N.B. Se i vincoli sono fissi (scleronomi allora

$$\boxed{\delta P_s \equiv d P_s} \quad s=1,\dots,N$$

in quanto $\vec{v}_s' = \vec{v}_s$. Perciò

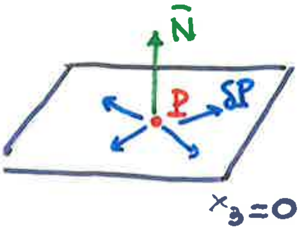
$$\boxed{0 \leq \delta L^{(v)} = d L^{(v)}} \quad \text{vincoli fissi}$$

Se i vincoli sono fissi e bilateri allora ogni $\delta P_s \equiv dP_s$ è invertibile e quindi

$$\boxed{0 = \delta L^{(v)} = d L^{(v)}} \quad \text{vincoli fissi e bilateri}$$

Il P.R.V. (2ª parte) permette di ottenere informazioni sul sistema $(P_s, \vec{\Phi}_s)$ tali da eliminare ogni indeterminazione nel problema del moto.

- Nell'esempio del punto vincolato al piano $x_3=0$, gli spostamenti virtuali sono tangenti al vincolo:



$\delta P = \delta x_1 \bar{\imath}_1 + \delta x_2 \bar{\imath}_2$ e sono tutti invertibili

$\Rightarrow \delta L^{(v)} = \vec{\phi} \cdot \delta P = 0 \quad \forall \, \delta P$ tangente a $x_3=0$

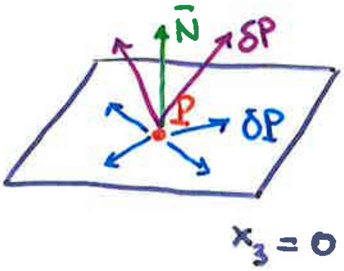
$\Rightarrow \boxed{\vec{\phi} = \phi \vec{N}}$ $\quad \phi \in \mathbb{R}$ incognita

Dal PRV abbiamo caratterizzato la direzione di $\vec{\phi}$ in modo che solo il modulo e il verso rimangono incogniti. Il sist. delle eq. del moto sarà:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = \mathcal{F}_1 \\ m\ddot{x}_2 = \mathcal{F}_2 \\ m\ddot{x}_3 = \mathcal{F}_3 + \phi \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

sistema di 4 eq. in 4 incognite: x_1, x_2, x_3, ϕ

- Se (P, m) è appoggiato al piano $x_3=0$ allora, oltre agli spostamenti invertibili tangenti al vincolo, esistono anche gli spostamenti non invertibili di distacco dal piano.



1) $\delta P \cdot \vec{N} = 0$ tangenti

2) $\delta P \cdot \vec{N} > 0$ di distacco

Da 1) si deduce $\boxed{\vec{\phi} = \phi \vec{N}}$, da 2) tramite PRV si ha

$$\vec{\phi} \cdot \delta P = \phi \vec{N} \cdot \delta P \geq 0 \Rightarrow \boxed{\phi \geq 0}$$

cioè il verso di $\vec{\phi}$ è dal vincolo verso il punto.
Resta incognito solo il modulo $\phi \in \mathbb{R}^+$.

Osservazione

Dato un solo punto mat. (P, m) vincolato, il PRINCIPIO implica che la reazione vincolare $(P, \vec{\phi})$ deve essere sempre normale al vincolo e se questo è unilatero deve essere diretta dall'appoggio verso il punto.

Questa osservazione si può estendere anche a sistemi materiali di punti.

Esempi 1) CORPO RIGIDO LIBERO

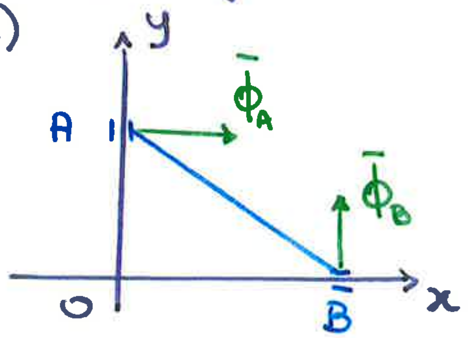
Dalla F.F.C. $\bar{v}_{P_s} = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times (P_s - O')$

$$\delta L^{(v)} = \sum_{s=1}^{N} \vec{\phi}_s^{\,i} \cdot \delta P_s = \sum_{s=1}^{N} \vec{\phi}_s^{\,i} \cdot [\bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times (P_s - O')]\, dt$$

$$= \underbrace{\sum_{s=1}^{N} \vec{\phi}_s^{\,i}}_{\vec{\phi}^{\,i}} \cdot \delta O' + \underbrace{\sum_{s=1}^{N} -\vec{\phi}_s^{\,i} \times (P_s - O')}_{\vec{\Psi}_{O'}^{\,i}} \cdot \bar{\omega}\, dt \equiv 0$$

Poiché $(P_s, \bar{\phi}_s)$ in base al Principio di Azione e Reazione costituisce un sistema di coppie di braccio nullo il lavoro virtuale delle reazioni interne ad un corpo rigido è sempre nullo.

2)

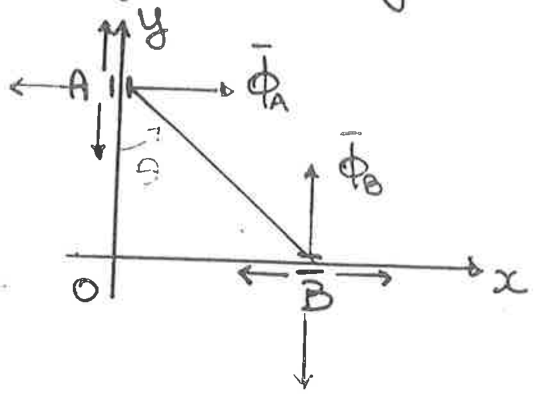


$$\delta L^{(v)} = \underbrace{\sum_s \bar{\phi}_s^{\,i} \cdot \delta P_s}_{=0} + \bar{\phi}_A \cdot \delta A + \bar{\phi}_B \cdot \delta B = 0$$

$\Rightarrow \phi_A \cdot \delta A = 0 \,,\; \phi_B \cdot \delta B = 0$

$\Rightarrow \phi_A, \phi_B$ ortogonali alle guide

2) aste AB aventi gli estremi vincolati a due guide ortogonali. (vin. me.)



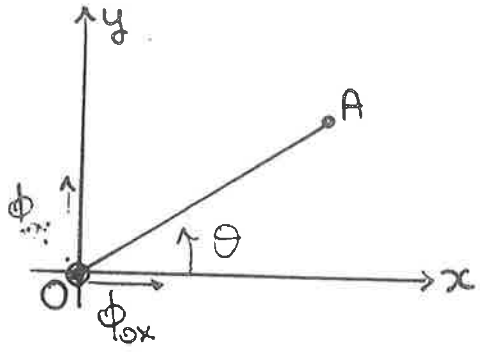
$$\delta L^v = \bar\Phi_A \cdot \delta A + \bar\Phi_B \cdot \delta B = 0 \quad \forall \delta A, \ \forall \delta B$$

$\bar\Phi_A \perp \delta A$

$\bar\Phi_B \perp \delta B$

CARRELLO

3) asta OA incernierata in O.



$$\delta L^v = \bar\Phi_o \cdot \delta O = 0$$

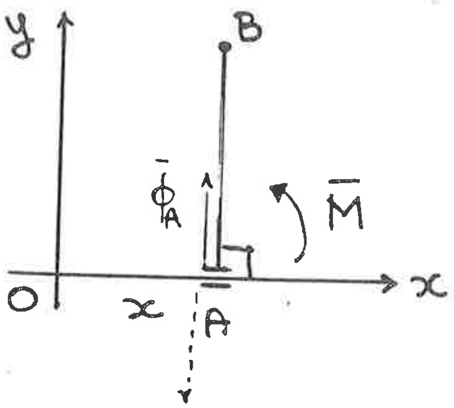
perchè O è fisso.

$\Rightarrow \bar\Phi_o$ è indeterminata

$$\vec\Phi_o = \Phi_{ox}\,\bar\imath + \Phi_{oy}\,\vec{J}$$

CERNIERA

4) asta AB vincolata a rimanere verticale con l'estrem[o] A scorrevole su un asse orizzontale.

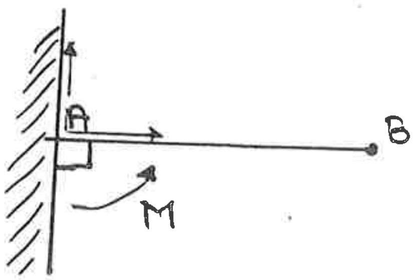


$\bar\Phi_A \perp \delta A$

però per mantenere l'angolo $B\hat{A}x$ retto occorre una <u>COPPIA</u> di momento $\vec M$ incognito.

PATTINO

5) asta AB incastrata (nessun movimento è consentito)

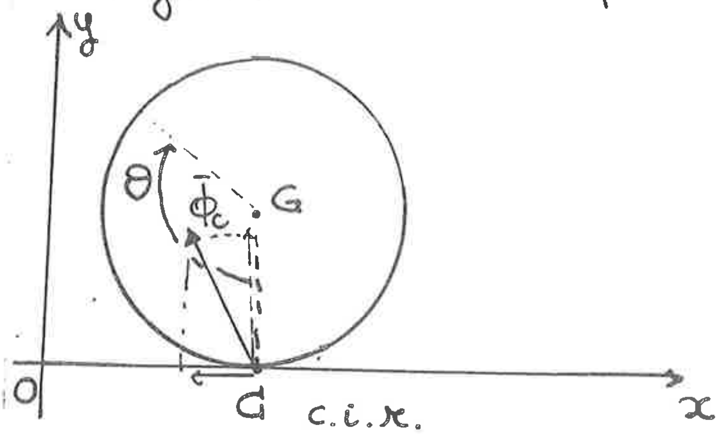


$$\bar\Phi_A = \Phi_{Ax}\,\bar\imath + \Phi_{AY}\,\vec{J} +$$

coppia di momento $\vec M$

INCASTRO

6) Disco che rotola senza strisciare su guida orizzontale fissa.



$$\delta L^v = \bar{\Phi}_C \cdot \delta C = ?$$

$$= \bar{\Phi}_C \cdot \bar{v}_C' \, dt$$

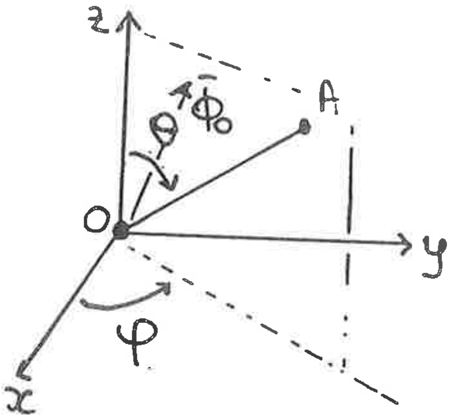
ma poiché C è il c.i.r.

$$\bar{v}_C' \equiv \bar{0} \Rightarrow \delta L^v \equiv 0$$

$\Rightarrow$ la reazione $\bar{\Phi}_C$ è <u>indeterminata</u>.

Nello spazio

7) asta OA incernierata in O in Oxyz.

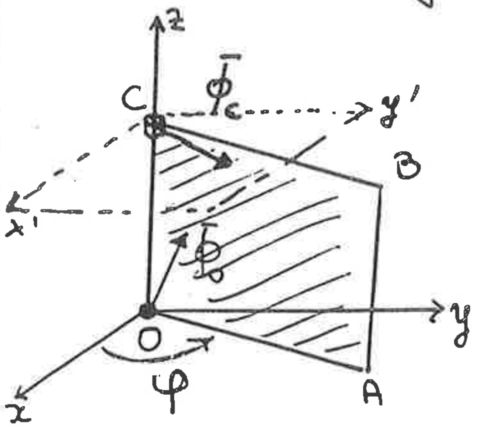


$$\bar{\Phi}_O = \Phi_{Ox}\,\bar{i} + \Phi_{Oy}\,\bar{j} + \Phi_{Oz}\,\bar{k}$$

è indeterminata

CERNIERA SFERICA

8) lamina rettangolare avente il lato OC fisso.



1) in O e in C due cerniere sferiche: $\bar{\Phi}_O$, $\bar{\Phi}_C$ indeterminate

2) in O cerniera sferica
in C cerniera cilindrica
(cuscinetto, anellino).

$\bar{\Phi}_O$ indeterminata

$\bar{\Phi}_C \in Cx'y'$ $(\perp Oz)$

CERNIERA CILINDRICA

$$\bar{\Phi}_C = \Phi_{Cx}\,\bar{i} + \Phi_{Cy}\,\bar{j}$$