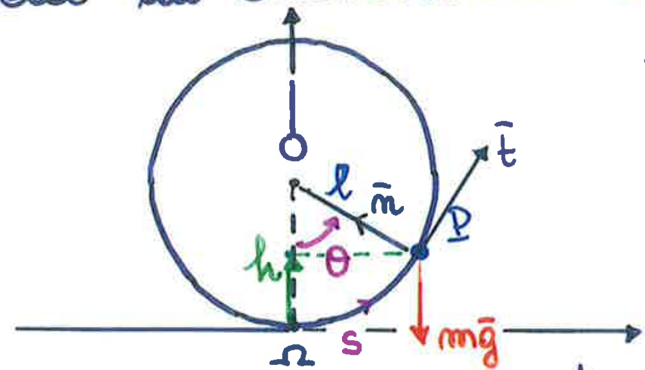
PENDOLO SEMPLICE

Def: Chiamiamo pendolo semplice un sistema meccanico costituito da un punto materiale pesante vincolato a muoversi senza attrito su una circonferenza fissa e verticale rispetto ad un osservatore terrestre.



Sia $\ell = |P - O|$ lunghezza del pendolo

e $s = \ell\theta$ ascissa curvilinea

Le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = -mg \operatorname{sen}\theta \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\ell} = -mg\cos\theta + \phi_n \\ 0 = \phi_b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_n$$

perciò

$$\begin{cases} \ell\ddot{\theta} = -g \operatorname{sen}\theta \\ \phi = m\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \end{cases}$$

La prima eq. fornisce l'equazione delle grandi oscillazioni del pendolo semplice:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta = 0}$$

mentre la seconda determina la reazione vincolare ϕ.

Nell'ipotesi $\theta \ll 1$ si ottiene, linearizzando, l'equazione delle piccole oscillazioni del pendolo s.:

$$\boxed{\ddot{\theta} + g/\ell\,\theta = 0}$$

in quanto $\operatorname{sen}\theta = \theta + o(\theta)$. Posto $\omega^2 = g/\ell$ si ottiene

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0}$$

la cui soluzione è:

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \gamma)}$$ oscillazioni armoniche

dove $\omega =$ pulsazione

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$ periodo delle piccole oscillazioni

Tale periodo è indipendente dall'ampiezza θ_0 (se vale $\operatorname{sen}\theta \cong \theta$) $\Rightarrow$ isocronismo del pendolo: Galileo Galilei 1851.

STUDIO DELLE GRANDI OSCILLAZIONI DEL PENDOLO

Poiché l'eq. delle grandi oscillazioni non è lineare, non si può integrarla in termini "finiti". Per determinare il periodo delle grandi oscillazioni e quindi l'andamento qualitativo del moto è conveniente utilizzare il teorema delle forze vive:

$$dT = dL = m\vec{g} \cdot dP + \vec{\Phi} \cdot dP$$

Poiché il vincolo è FISSO e BILATERO e la forza è conservativa (peso) vale:

$$T + V = E$$

che riferita a (P, m) mobile sulla circonferenza:

$$\boxed{\frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V(s) = E}$$

$s = l\theta \quad \boxed{V(s) = mgh = mgl(1-\cos\theta) = mgl \cdot 2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}$

quindi otteniamo:

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + 2mgl\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}$$

dove $E = T_0 + V_0$ dipende dalle condizioni iniziali.

Se $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$

$$E = 2mgl\,\text{sen}^2\frac{\theta_0}{2}$$

perciò:

$$\frac{1}{2} \cancel{m} l^{\cancel{2}} \dot{\theta}^2 = 2\cancel{m}g\cancel{l}\left(\text{sen}^2\frac{\theta_0}{2} - \text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\theta} = \pm 2\omega\sqrt{\text{sen}^2\frac{\theta_0}{2} - \text{sen}^2\frac{\theta}{2}}}$$

separando le variabili:

$$dt = \pm \frac{d\theta}{2\omega\sqrt{\text{sen}^2\frac{\theta_0}{2} - \text{sen}^2\frac{\theta}{2}}}$$

e integrando su un semiperiodo

$$\int_0^{\frac{\tau}{2}} dt = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{2\omega\sqrt{\dots}} = \cancel{2}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\cancel{2}\omega\sqrt{\dots}}$$

$$\tau = \frac{2}{\omega}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{sen}^2\frac{\theta_0}{2} - \text{sen}^2\frac{\theta}{2}}}$$

INTEGRALE ELLITTICO IMPROPRIO

Con un calcolo approssimato si ricava:

$$\boxed{\tau \cong \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \dots\right)}$$

e per $\theta_0 \ll 1$ si ottiene $\tau \cong \frac{2\pi}{\omega} + o(\theta_0)$ (isocronismo)

OSCILLAZIONI NON LINEARI : METODO DI WEIERSTRASS

Illustriamo un metodo qualitativo per lo studio di un punto mat. (P, m) vincolato ad una curva fissa e liscia soggetto a forze conservative.
Abbiamo già osservato che per tale punto vale il teorema di conservazione dell'energia.

$$\frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V(s) = E$$

da cui

$$\boxed{\dot{s} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(s)\right)}}$$

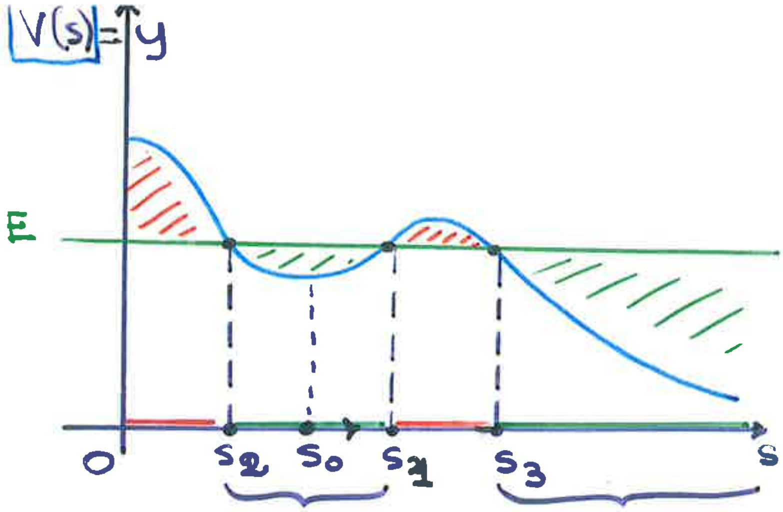
Il segno ($\pm$) dipende dalle condizioni iniziali.
Infatti se inizialmente

$$s(0) = s_0 \quad e \quad \dot{s}(0) = \boxed{v_0 > 0}$$

per il th. della permanenza del segno delle funzioni continue si avrà

$$\boxed{\dot{s}(t) > 0 \quad \forall t \in [0, \varepsilon)} \quad \varepsilon > 0 \text{ opportuno}$$

In tal caso varrà il segno (+) ed $\boxed{s = s(t)}$ sarà inizialmente monotona crescente.
E tale resterà fino a quando non raggiungerà una posizione (s_1) corrispondente ad un istante di arresto t_1 per il quale $\boxed{\dot{s}(t_1) = 0}$.



Per la realtà della radice

$E - V(s) \geq 0$

regioni in cui il MOTO È POSSIBILE

$s_1 = s(t_1) \;:\; E - V(s_1) = 0 \iff \dot{s}(t_1) = 0$

t_1, t_2, t_3 istanti di arresto

s_1, s_2, s_3 punti di arresto

Fino a che il moto non incontra una posizione di arresto, esso è diretto.

Consideriamo la regione $s_0 < s < s_1$:

$$\dot{s}(t) > 0 \;,\; s(t) \text{ è crescente}$$

per cui

$$\dot{s}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(s)\right)}$$

per separazione delle variabili:

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(s)\right)}} = t(s)$$

monotona crescente

$\Rightarrow$ INVERTIBILE

Per determinare l'istante in cui P raggiunge la posizione s_1, basta fare il limite per $s \to s_1$:

$$\boxed{t_1 = \lim_{s \to s_1} \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{\dots}}} = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{\dots}}$$

integrale IMPROPRIO

Poiché $E - V(s_1) = 0 \Rightarrow t_1$ può essere FINITO o INFINITO

Per sapere se l'integrale improprio CONVERGE o DIVERGE bisogna studiare l'ordine di infinitesimo della funzione $E - V(s)$ in $s = s_1$.

Distinguiamo due casi:

a) s_1 è una radice semplice di $F(s) = \frac{2}{m}[E - V(s)]$

Allora

$$\boxed{F(s) = (s_1 - s)\, f(s) \quad , \quad f(s) > 0} \quad \forall s \in [s_0, s_1]$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(s))}} = \frac{1}{\sqrt{F(s)}} = \frac{1}{(s_1 - s)^{1/2}\sqrt{f(s)}}$$

$\sqrt{f(s)} \neq 0 \ \forall s \in [s_0, s_1]$

$\alpha = \frac{1}{2}$ ordine di infinitesimo

Essendo $0 < \alpha < 1$ l'integrale improprio converge e $t_1 < +\infty$.

Il punto raggiungerà la radice semplice s_1 (pto di arresto) in un tempo finito t_1 (istante di arresto)

$$t_1 = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{F(s)}} < +\infty$$

b) s_1 è una radice multipla (almeno doppia) di $F(s)$. Allora:

$$\boxed{F(s) = (s_1 - s)^2\, g(s) \quad , \quad g(s) \geq 0} \quad \forall s \in [s_0, s_1]$$

$$\frac{1}{\sqrt{F(s)}} = \frac{1}{(s_1 - s)\sqrt{g(s)}}$$

$\sqrt{g(s)}$ può annullarsi per $s = s_1$, ordine di infinitesimo ≥ 0

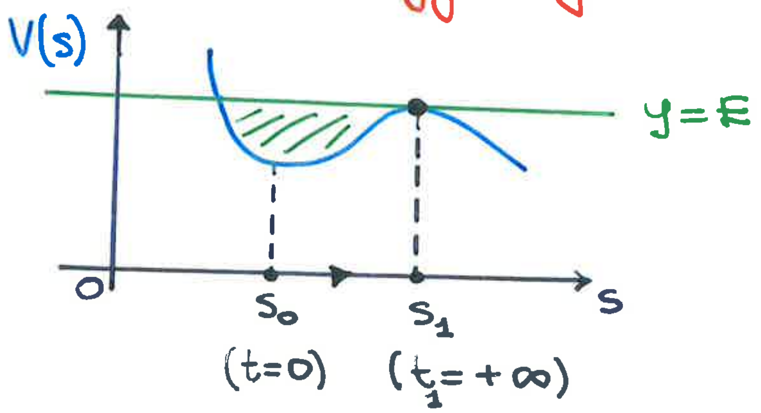
$\alpha = 1$ ordine di infinitesimo

quindi $\frac{1}{\sqrt{F(s)}}$ ha ordine di infinitesimo $\alpha \geq 1$.

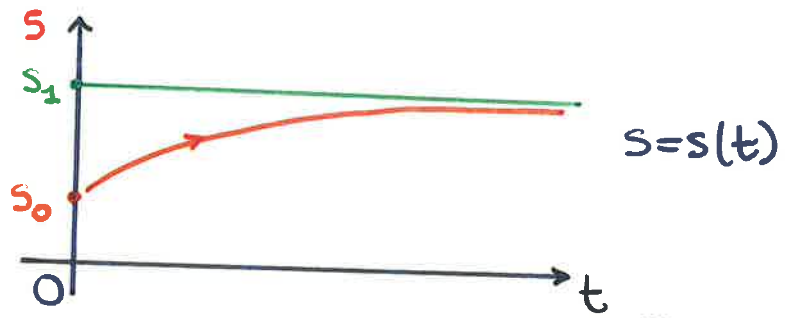
L'integrale improprio diverge e

$$\lim_{s \to s_1} \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{F(s)}} = +\infty$$

Il punto tende asintoticamente alla radice multipla s_1 senza raggiungerla in tempo finito.



In questo caso il moto è asintotico.



■

Nel caso a) invece bisogna stabilire cosa succede DOPO l'istante di arresto t_1: ciò dipende dal segno dell'accelerazione nell'istante t_1.

- Se $\ddot{s}(t_1) > 0$ il punto riprende il proprio moto nel verso delle s crescenti
- Se $\ddot{s}(t_1) < 0$ il punto, dopo l'arresto, inverte il senso di marcia, ritorna in s_0 e prosegue alla sua sinistra con velocità negativa.

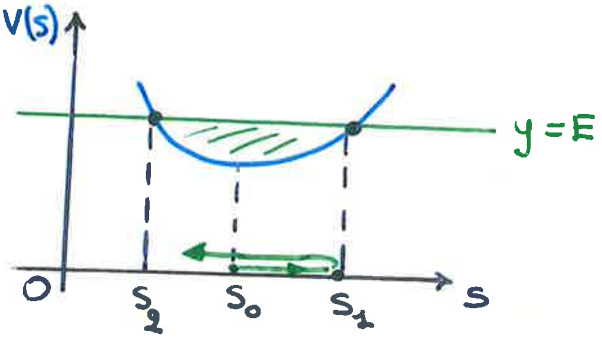
Se $0<t<t_1$

$$\ddot{s}(t) = \frac{d}{dt}\dot{s}(t) = \frac{d}{dt}\underset{\substack{\downarrow \\ s=s(t)}}{\sqrt{F(s)}} = \frac{1}{2\sqrt{F(s)}}\frac{dF}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{F'(s)}{2\cancel{\sqrt{F(s)}}}\cancel{\dot{s}} =$$

$$= \frac{1}{2}F'(s) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[(s_1-s)f(s)\right] = \frac{1}{2}(s_1-s)f'(s) - \frac{1}{2}f(s)$$

poichè $s(t_1)=s_1$:

$$\boxed{\ddot{s}(t_1)} = -\frac{1}{2}\underbrace{f(s_1)}_{>0}\boxed{<0}$$



Nell'intervallo $t_1<t<t_2$ il moto è retrogrado, cioè:

$$\dot{s}(t) = -\sqrt{F(s(t))}$$

L'istante di arresto t_2 è tale che $s(t_2)=s_2$.

Riassumendo:

1) la posizione iniziale s_0 deve essere tale che

$$E - V(s_0) > 0$$

2) se s_0 è compreso tra due radici semplici s_2, s_1 il moto è oscillatorio periodico e il periodo dell'oscillazione tra s_2 e s_1 $(s_2<s_1)$ è:

$$\tau = \int_{s_2}^{s_1}\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{E-V(s)}}\,ds$$

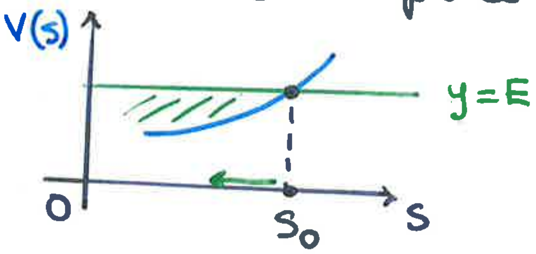
OSCILLAZIONI NON LINEARI

3) se s_0 è compreso tra due radici di cui almeno una è multipla, il moto è asintotico.

N.B. Se s_0 coincide con una radice ($E = V(s_0)$):

$$\boxed{v_0 = \dot{s}(0) = 0}$$

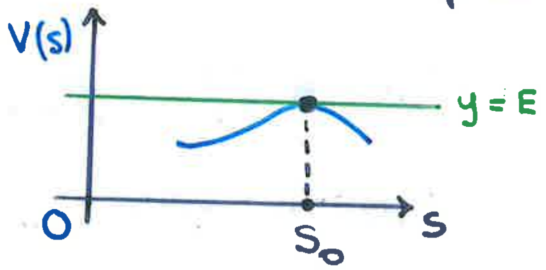
i) s_0 radice semplice : il punto si muove nel verso dell'accelerazione iniziale :



$$\boxed{\ddot{s}(0) = \frac{1}{2} F'(s_0)}$$

MOTO INCIPIENTE

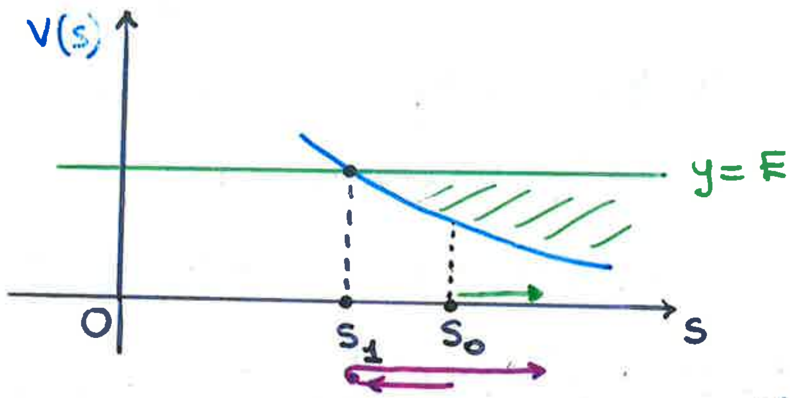
ii) s_0 radice multipla : il punto permane in quiete in tale posizione iniziale:



$$\boxed{\ddot{s}(0) = \frac{1}{2} F'(s_0) \equiv 0}$$

4) se s_0 è compreso tra una radice semplice s_1 e $+\infty$ significa che :

$$E - V(s) > 0 \quad \forall\, s > s_1$$



- Se inizialmente $v_0 > 0$ allora $v(t) > 0$ $\forall t > 0$ e il punto tende all'infinito per $t \to \infty$.
- Se inizialmente $v_0 < 0$ allora $s \to s_1$ e in tale istante la velocità è nulla; quindi il pto inverte il moto e con velocità positiva tende all'infinito per $t \to \infty$.

In ogni caso dopo un certo istante $\bar{t}$, il moto è diretto.

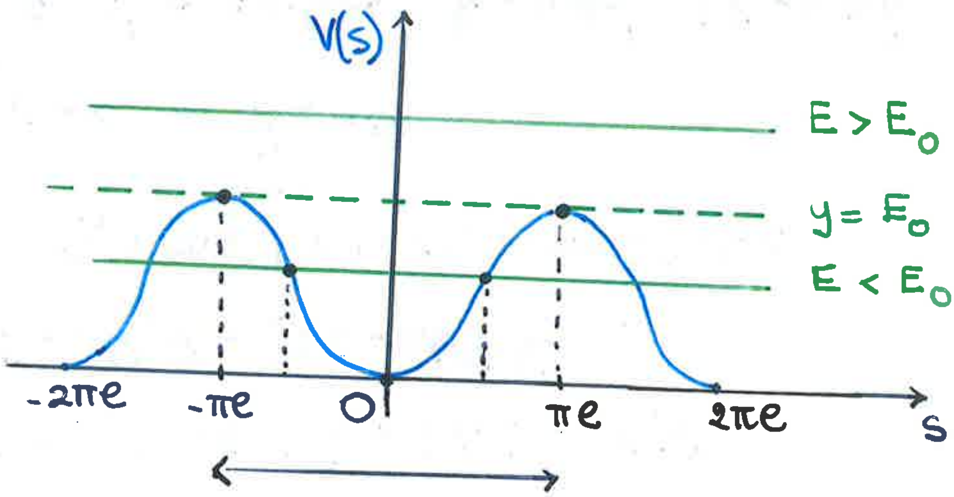
PENDOLO SEMPLICE

$$V(s) = 2mg\ell \, \text{sen}^2\left(\frac{s}{2\ell}\right) \qquad \boxed{s = \ell\theta}$$

$$V'(s) = 2mg\ell \cdot 2\,\text{sen}\left(\frac{s}{2\ell}\right)\cos\left(\frac{s}{2\ell}\right)\cdot\frac{1}{2\ell} = mg\,\text{sen}\left(\frac{s}{\ell}\right)$$

$V'(s) = 0$ per $s = 0$, $s = \pm\pi\ell$

$V(0) = 0 = V_{min}$ $\qquad V(\pm\pi\ell) = 2mg\ell = V_{max} \equiv E_0$



$$\dot{s} = \pm 2\sqrt{g\ell\left(\frac{E}{E_0} - \text{sen}^2\left(\frac{s}{2\ell}\right)\right)}$$

- se $E > E_0$ nessuna radice $\dot{s}$ sarà sempre >0 oppure <0 $\Rightarrow$ moto diretto o retrogrado
- se $E = E_0$ i) $-\pi\ell < s_0 < \pi\ell$ moto asintotico ⎫ 2 radici
  ii) $s_0 = \pm\pi\ell$ quiete ⎭ doppie
- se $0 < E < E_0$ due radici semplici
  oscillazioni non lineari periodiche
- se $E = 0$ $s_0 = 0$ quiete