DINAMICA DEI SISTEMI MATERIALI

Dato un sistema materiale discreto costituito dai punti (P_s, m_s) $s=1,\dots,N$, chiamiamo **baricentro** o **centro di massa** del sistema mat. il punto G così definito:

$$\boxed{G-O=\frac{\sum_{s=1}^{N} m_s (P_s-O)}{\sum_{s=1}^{N} m_s}}$$

dove O è pto arbitrario di riferimento. Nel riferimento cartesiano ortogonale $Ox_1x_2x_3$:

$$x_{iG}=\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{N} m_s\, x_i(P_s)=\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{N} m_s\, x_{is}$$

dove $m=\sum_{s=1}^{N} m_s$ e $i=1,2,3$

Il sistema delle forze peso è equivalente ad un'unica forza applicata nel baricentro, pari al risultante $\vec{R}$

$\vec{R}=\sum_{s=1}^{N} m_s\vec{g}=m\vec{g}$

(baricentro coincide col centro del sistema di vettori paralleli e concordi di lunghezza proporzionale alle masse dei punti)

Se il sistema è continuo la massa (del corpo $\mathcal{B}$) è definita:

$$\boxed{m = \int_{\mathcal{B}} \rho(P)\, dV}$$

dove $\rho : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$ è la densità di massa detta lineare o superficiale se $\mathcal{B}$ ha ~~una~~ due o una dimensione trascurabile e il baricentro è definito

$$\boxed{G - O = \frac{1}{m(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}} \rho(P)(P - O)\, dV}$$

Se il sist. mat. è omogeneo, cioè la ρ è costante allora $m = \rho V$ e

$$\boxed{G - O = \frac{1}{Vol(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}} (P - O)\, dV}$$

dipendente solo dalle caratteristiche geometriche di $\mathcal{B}$.

Proposizione: Il baricentro non dipende dalla scelta del punto O.

Preso $O' \neq O$ sia G':

$$G' - O' = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{N} m_s \vec{x}_s' \qquad \vec{x}_s' = (P_s - O')$$

sottraendo membro a membro:

$$\underbrace{(G - O) - (G' - O')}_{= (G - G') + (O' - O)} = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{N} m_s (O' - O) = (O' - O)$$

$$\Rightarrow \quad G - G' = \vec{0}$$

Proprietà del baricentro

1) se le masse di un sist. mat. appartengono ad una retta o ad un piano, il baricentro appartiene a tale retta o piano;

2) se il sist. mat. ha un piano di simmetria materiale π (punti simmetrici del sist. mat. rispetto a tale piano hanno uguale massa), il baricentro appartiene a π;

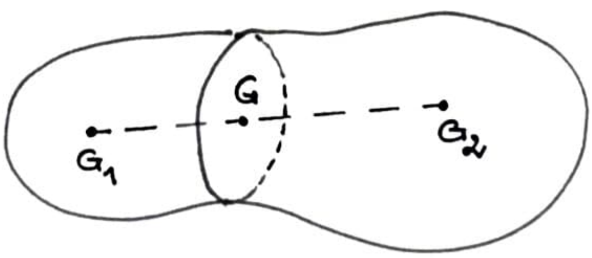
3) se il sist. mat. ha 2 piani di simmetria, il baricentro appartiene alla retta, intersezione dei due piani;

4) se il sist. mat ha un asse di simmetria, il baricentro appartiene a tale asse

5) proprietà distributiva: scomposto il sist. mat. nella somma di due sistemi di massa m_1 e m_2 e di baricentri G_1 e G_2 allora il baricentro G del sistema di massa m è dato da:

$$G - O = \frac{m_1 (G_1 - O) + m_2 (G_2 - O)}{m}$$

dove $m = m_1 + m_2$



$S = S_1 \cup S_2$

$S_1 : (P_s, m_s)\ s = 1, \dots, n \quad ; \quad S_2 : (P_s, m_s)\ s = n+1, \dots, N$

$$G_1 - O = \frac{1}{m_1} \sum_{s=1}^{n} m_s (P_s - O), \quad G_2 - O = \frac{1}{m_2} \sum_{s=n+1}^{N} m_s (P_s - O)$$

Allora

$$G - O = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{N} m_s (P_s - O)$$

$$= \frac{1}{m} \left[m_1 \frac{\sum_{s=1}^{n} m_s (P_s - O)}{m_1} + m_2 \frac{\sum_{s=n+1}^{N} m_s (P_s - O)}{m_2} \right]$$

$$= \frac{1}{m} \left[m_1 (G_1 - O) + m_2 (G_2 - O) \right]$$

Quantità meccaniche per un sistema materiale

Def: Chiamiamo quantità di moto di (S, m) costituito da pti $(P_s, m_s)\ s = 1, \dots, N$ il vettore:

$$\boxed{\vec{Q} = \sum_{s=1}^{N} m_s \vec{v}_s = m \vec{v}_G}$$

L'ultima uguaglianza segue dalla derivazione rispetto a t della definizione di baricentro.

$$\vec{v}_G = \frac{d}{dt}(G - O) = \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^{N} m_s (P_s - O) = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{N} m_s \vec{v}_s$$

Teorema: La quantità di moto di un sistema mat. rispetto ad un riferimento con origine nel baricentro è sempre nulla.

Introdotto il rif. (G, x_1, x_2, x_3) sia $\bar{v}_s'$ la velocità di P_s rispetto ad esso. Segue:

$$\vec{Q}' = \sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_s' = m \bar{v}_G'$$

ma $\bar{v}_G'$, velocità di G rispetto a (G, x_1, x_2, x_3) è nulla!

Def: Chiamiamo **momento della quantità di moto** rispetto al polo O, di un sist. mat. il vettore:

$$\boxed{\vec{K}_O = \sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_s \times (O - P_s)}$$

Introdotto un sist. di rif. (G, x_1', x_2', x_3'), con assi paralleli a quelli del riferimento fisso, chiamato **riferimento di König**, vale il seguente teorema:

Teorema di König per il momento della quantità di moto

Il momento della quantità di moto $\vec{K}_O$, calcolato rispetto ad un polo O è dato da

$$\boxed{\vec{K}_O = \vec{K}_G' + m \bar{v}_G \times (O - G)}$$

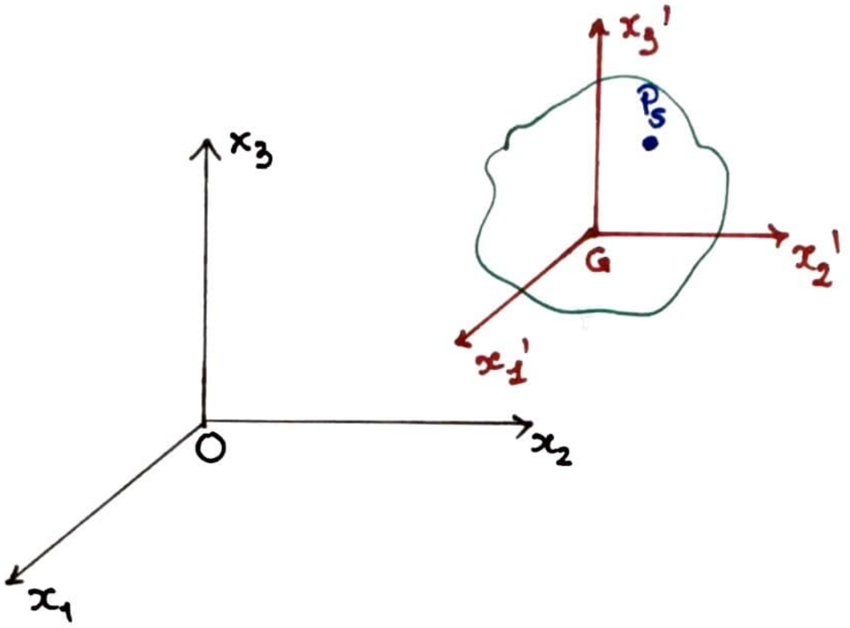
dove $\vec{K}_G'$ è il momento della quantità di moto del sist. rispetto al polo G, riferito all'osservatore (G, x_1', x_2', x_3').

Dim:

$(P_s - O) = (P_s - G) + (G - O)$

$\bar{v}_a(P_s) = \bar{v}_r(P_s) + \bar{v}_\tau(P_s)$

(G, x_1', x_2', x_3') trasla rispetto ad $(O, x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \bar{v}_\tau(P_s) = \bar{v}_G$



$$\bar{K}_O = \sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_s \times (O-P_s) = \sum_{s=1}^{N} m_s (\bar{v}_{rs} + \bar{v}_G) \times (O-P_s)$$

$$= \sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_{rs} \times (O-P_s) + \sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_G \times (O-P_s)$$

$$= \sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_{rs} \times [(O-G) + (G-P_s)] + \bar{v}_G \times [\underbrace{\sum_{s=1}^{N} m_s (O-P_s)}_{= m(O-G)}]$$

$$= \underbrace{\sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_{rs} \times (O-G)}_{\vec{\dot{Q}}' \equiv \vec{0}} + \underbrace{\sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_{rs} \times (G-P_s)}_{\vec{\dot{K}}'_G} + \bar{v}_G \times [m(O-G)]$$

$$= \vec{\dot{K}}'_G + m \bar{v}_G \times (O-G) \quad \blacksquare$$

Se $O \equiv G$ si ha:

$$\boxed{\vec{\dot{K}}_G = \vec{\dot{K}}'_G}$$

cioè il mom. delle q. di moto rispetto al baricentro è lo stesso rispetto ai 2 sistemi di riferimento.

Teorema di König per l'energia cinetica

L'energia cinetica di un sist. mat. è data da:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T'}$$

dove T' è l'energia cinetica rispetto al rif. (G, x_1', x_2', x_3') con assi immobili rispetto al rif. fisso.

<u>Dim</u>:
come nel caso del th. di König per le masse

$\bar{v}_s = \bar{v}_{rs} + \bar{v}_G$

quindi

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s v_s^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \left(\bar{v}_{rs} + \bar{v}_G \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \left(v_{rs}^2 + v_G^2 + 2 \bar{v}_{rs} \cdot \bar{v}_G \right)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{s=1}^{N} m_s}_{=m} v_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s v_{rs}^2}_{=T'} + \underbrace{\sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_{rs}}_{=\bar{Q}' \equiv \bar{0}} \cdot \bar{v}_G$$

$$= \frac{1}{2} m v_G^2 + T' \quad \blacksquare$$

CORPO RIGIDO

a) corpo rigido con un punto fisso O $(\in \mathcal{B})$

Lo stato cinetico è rotatorio, cioè $\forall P_s \in \mathcal{B}$:

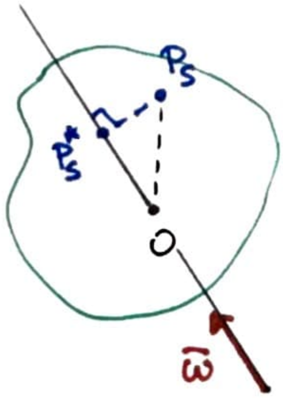
$$\bar{v}_s = \bar{\omega} \times (P_s - O)$$

Dalla def. di energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s v_s^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \left[\bar{\omega} \times (P_s - O) \right]^2$$

$$(P_s - O) = (P_s - P_s^*) + (P_s^* - O)$$

P_s^* proiezione di P_s sull'asse di istantanea rotazione



$$\bar{\omega} \times (P_S - O) = \bar{\omega} \times (P_S - P_S^*) + \underbrace{\bar{\omega} \times (P_S^* - O)}_{=\bar{0}}$$

$$\perp$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \left[\bar{\omega} \times (P_S - P_S^*) \right]^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \, \omega^2 \, |P_S - P_S^*|^2$$

$|P_S - P_S^*| = r_s$

Def: Definiamo **momento d'inerzia** del corpo rigido rispetto all'asse di istantanea rotazione lo scalare

$$\boxed{I = \sum_{s=1}^{N} m_s r_s^2}$$

pertanto

$$\boxed{T} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s r_s^2 \omega^2 = \boxed{\frac{1}{2} I_\omega \, \omega^2}$$

N.B.: Il momento d'inerzia di un corpo dipende solo dalla distribuzione geometrica delle masse del corpo e in generale non è costante perchè durante il moto di $\mathcal{B}$ l'asse di istantanea rotazione varia nello spazio. I è costante SOLO SE IL MOTO di $\mathcal{B}$ è di rotazione.

b) corpo rigido senza punti fissi

Vale il teorema di König $T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T'$

ma in questo caso

$$\boxed{T' = \frac{1}{2} I_{G\omega} \, \omega^2}$$

dove $I_{G\omega}$ è il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il baricentro parallelo all'asse di rot. istantanea.

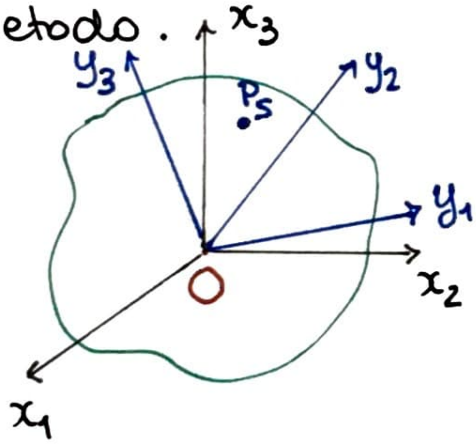
Infatti rispetto al rif. (G, x_1', x_2', x_3') il punto G è come se fosse fisso, quindi $\bar{v}_{rs} = \bar{\omega} \times (P_s - G)$

(atto di moto rotatorio attorno ad un asse passante per G $\parallel$ ad $\bar{\omega}$).

Poichè I non è costante l'espressione di T nel caso a):

$$T = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2$$

è difficoltosa da ~~...~~ calcolare seguiamo un altro metodo.



$Ox_1x_2x_3$ rif. fisso

$Oy_1y_2y_3$ rif solidale con $\mathcal{B}$

$\bar{v}_s = \bar{\omega} \times (P_s - O)$

$= \bar{\omega} \times \bar{x}_s' = \bar{\omega} \times \bar{y}_s$

$$\bar{\omega} \times \bar{y}_s = \begin{vmatrix} \bar{J}_1 & \bar{J}_2 & \bar{J}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ y_{1s} & y_{2s} & y_{3s} \end{vmatrix}$$

$\underbrace{\omega_1, \omega_2, \omega_3}$ componenti di $\bar{\omega}$ nel rif. solidale

$\downarrow$

equazioni cinematiche di Eulero

$$\bar{v}_s = (\omega_2 y_{3s} - \omega_3 y_{2s})\bar{J}_1 - (\omega_1 y_{3s} - \omega_3 y_{1s})\bar{J}_2 + (\omega_1 y_{2s} - \omega_2 y_{1s})\bar{J}_3$$

$$v_s^2 = (\omega_2 y_{3s} - \omega_3 y_{2s})^2 + (\omega_3 y_{1s} - \omega_1 y_{3s})^2 + (\omega_1 y_{2s} - \omega_2 y_{1s})^2$$

$$= \omega_2^2 y_{3s}^2 + \omega_3^2 y_{2s}^2 - 2\omega_2\omega_3 y_{2s} y_{3s} +$$
$$\omega_3^2 y_{1s}^2 + \omega_1^2 y_{3s}^2 - 2\omega_1\omega_3 y_{1s} y_{3s} +$$
$$\omega_1^2 y_{2s}^2 + \omega_2^2 y_{1s}^2 - 2\omega_1\omega_2 y_{1s} y_{2s}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s v_s^2 = \frac{1}{2}\left\{\sum_{s=1}^{N} m_s (y_{2s}^2 + y_{3s}^2)\omega_1^2 + \sum_{s=1}^{N} m_s (y_{1s}^2 + y_{3s}^2)\omega_2^2 + \right.$$

$$+ \sum_{s=1}^{N} m_s (y_{1s}^2 + y_{2s}^2)\omega_3^2 - 2\sum_{s=1}^{N} m_s y_{1s} y_{2s}\, \omega_1 \omega_2 -$$

$$\left. - 2\sum_{s=1}^{N} m_s y_{2s} y_{3s}\, \omega_2 \omega_3 - 2\sum_{s=1}^{N} m_s y_{1s} y_{3s}\, \omega_1 \omega_3 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2 + 2 I_{12}\omega_1\omega_2 +$$

$$2 I_{13}\omega_1\omega_3 + 2 I_{23}\omega_2\omega_3 \Big]$$

dove:

$$\left.\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{s=1}^{N} m_s (y_{2s}^2 + y_{3s}^2) \\ I_{22} &= \sum_{s=1}^{N} m_s (y_{1s}^2 + y_{3s}^2) \\ I_{33} &= \sum_{s=1}^{N} m_s (y_{1s}^2 + y_{2s}^2) \end{aligned}\right\} \text{momenti d'inerzia rispetto agli assi } y_1, y_2, y_3.$$

$$\left.\begin{aligned} I_{12} &= -\sum_{s=1}^{N} m_s y_{1s} y_{2s} \\ I_{13} &= -\sum_{s=1}^{N} m_s y_{1s} y_{3s} \\ I_{23} &= -\sum_{s=1}^{N} m_s y_{2s} y_{3s} \end{aligned}\right\} \text{prodotti d'inerzia o momenti di deviazione}$$

sono gli elementi di una matrice simmetrica detta **matrice d'inerzia** in cui ogni suo termine ha le dimensioni di una massa per una lunghezza al quadrato.

$$I_{hk} = \sum_{s=1}^{N} m_s (\delta_{hk} y_s^2 - y_{hs} y_{ks}) \qquad \delta_{hk} = \begin{cases} 1 & h = k \\ 0 & h \neq k \end{cases}$$

$$y_s^2 = y_{1s}^2 + y_{2s}^2 + y_{3s}^2$$

$$\underset{\sim}{I}_0 = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

3x3

Utilizzando la matrice d'inerzia

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{3} I_{hk}\, \omega_h \omega_k = \frac{1}{2} \underset{\sim}{I}_0 \bar{\omega} \cdot \bar{\omega}}$$

Mediante la matrice d'inerzia è possibile determinare il momento d'inerzia rispetto ad un QUALSIASI asse PASSANTE per il punto fiss O.

Detto $\vec{\alpha}$ versore di tale asse, diretto come $\vec{\omega}$ allora

$$\vec{\alpha} = \alpha_1 \bar{J}_1 + \alpha_2 \bar{J}_2 + \alpha_3 \bar{J}_3$$

$$\alpha_i = \frac{\omega_i}{\omega} \qquad \omega = \left(\sum_{i=1}^{3} \omega_i^2 \right)^{1/2}$$

Dal confronto:

$$T = \frac{1}{2} I_\alpha \omega^2 \qquad T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{3} I_{hk}\, \omega_h \omega_k$$

si ottiene

$$\boxed{I_\alpha = \sum_{h,k=1}^{3} I_{hk}\, \alpha_h \alpha_k = \underset{\sim}{I}_0 \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha}}$$

che permette di calcolare il mom. d'inerzia rispetto ad un qlq asse passante per O, nota la $\underset{\sim}{I}_0$.

Poichè $I_\alpha > 0 \Rightarrow \underset{\sim}{I}_0$ è definita positiva oltre che simmetrica

ASSI PRINCIPALI D'INERZIA

Fra tutte le terne solidali col corpo rigido con punto fisso è possibile individuare quella per cui la matrice $\underset{\sim}{I}_o$ risulta diagonale (momenti di deviazione sono nulli). In tal caso i momenti d'inerzia sono detti momenti principali d'inerzia e gli assi del rif. solidale sono detti assi principali d'inerzia.

Def: Chiamiamo autovettore della matrice $\underset{\sim}{I}_o$ ogni vettore $\bar{a}$ per cui esiste uno scalare λ chiamato autovalore tale che

$$\underset{\sim}{I}_o \bar{a} = \lambda \bar{a} \qquad (\bullet)$$

Teorema: Gli autovalori di $(\bullet)$ si ottengono come soluzione dell'equazione algebrica di 3° grado

$$\det[\underset{\sim}{I}_o - \lambda \underset{\sim}{1}] = 0$$

dove $\underset{\sim}{1}$ è la matrice identità. Poiché $\underset{\sim}{I}_o$ è simmetrica gli autovalori sono reali.

Ad ogni autovalore λ è possibile associare un autovettore $\bar{a}$, pertanto esisteranno almeno 3 autovettori di $\underset{\sim}{I}_o$ (da $(\bullet)$).

Teorema: Alla matrice $\underset{\sim}{I}_o$ è possibile associare 3 autovettori $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ tra loro ortogonali

se $\bar{a}$ è autovettore anche $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ lo è, quindi possiamo scegliere la terna $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ ortonormale.

Se la terna solidale col corpo rigido coincide con $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$ la $\underset{\sim}{I}_o$ risulta diagonale

Teorema: I momenti principali d'inerzia coincidono con l'autovalore corrispondente all'autovettore diretto secondo l'asse d'inerzia considerato

Sia λ autovalore di $\underset{\sim}{I}_o \Rightarrow \exists \bar{a} : \underset{\sim}{I}\,\bar{a} = \lambda \bar{a}$

da cui

$$\underset{\sim}{I}_o \bar{a} \cdot \bar{a} = \lambda \bar{a} \cdot \bar{a} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\underset{\sim}{I}_o \bar{a} \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|^2}$$

Ponendo $\vec{\alpha} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ si ha:

$$I_\alpha = \underset{\sim}{I}_o \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \cdot \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \underset{\sim}{I}_o \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} = \lambda$$

Proprietà

1) ogni asse di simmetria materiale per $\mathcal{B}$ rigido è asse principale d'inerzia
2) ogni asse perpendicolare ad un piano di simmetrie materiale per $\mathcal{B}$ è asse principale d'inerzia
3) se $\mathcal{B}$ ha un asse di simmetria materiale, tutti gli assi ad esso ortogonali sono assi principali d'inerzia
4) se $\mathcal{B}$ è corpo rigido piano allora un asse principale d'inerzia rispetto ad un qlq pto del corpo è ortogonale al piano

se $\mathcal{B} \in O y_1 y_2$ allora

$$\boxed{I_{11} + I_{22} = I_{33}}$$

Infatti se $\mathcal{B} \in O y_1 y_2 \Rightarrow y_3 \perp$ piano è principale d'inerzia e quindi $I_{13} = I_{23} = 0$; inoltre:

$$I_{11} = \sum_{s=1}^{N} m_s y_{2s}^2 \quad , \quad I_{22} = \sum_{s=1}^{N} m_s y_{1s}^2 \qquad \forall P_s \in \mathcal{B} \; x_{3s} = 0$$

quindi

$$I_{11} + I_{22} = \sum_{s=1}^{N} m_s (y_{1s}^2 + y_{2s}^2) = I_{33} . \blacksquare$$

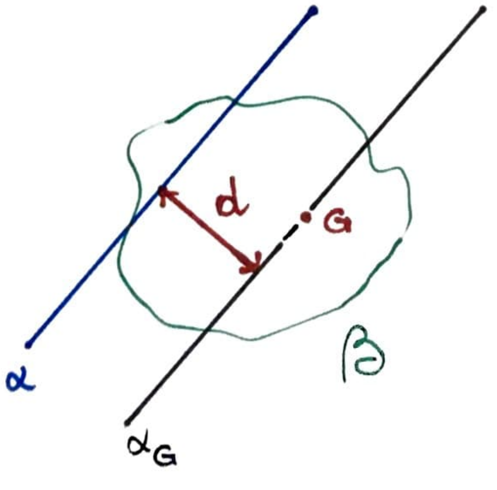
Attraverso la matrice d'inerzia è possibile determinare i momenti rispetto ad assi passanti per uno stesso punto ($I_\alpha = \underset{\sim}{I}_O \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha}$)

Attraverso il seguente teorema è possibile determinare una relazione tra i momenti d'inerzia relativi ad assi paralleli.

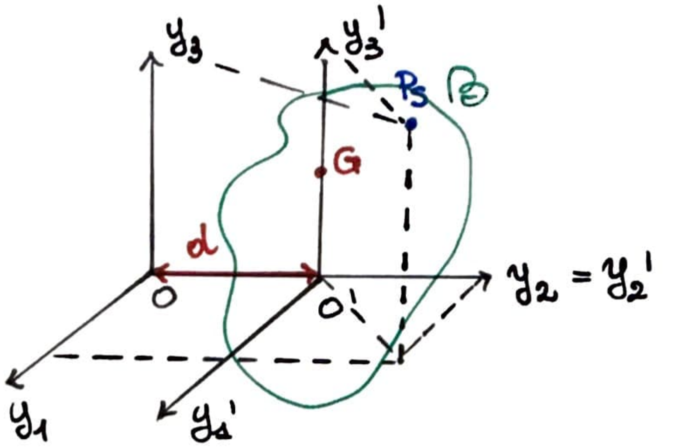
TEOREMA DI HUYGENS

Il momento d'inerzia I_α di un corpo rigido rispetto ad un asse α è uguale al momento d'inerzia $I_{G\alpha}$ rispetto ad un asse baricentrico parallelo ad α più la massa m del corpo moltiplicato per la distanza al quadrato d^2 fra i due assi

$$\boxed{I_\alpha = I_{\alpha G} + m d^2}$$



Dim:



Scelti $Oy_1y_2y_3$ e $O'y_1'y_2'y_3'$

con $y_2 \equiv y_2'$

$y_3 = \alpha$

$y_3' = \alpha_G$

$\forall P_s \in \mathcal{B}$

$$\begin{cases} y_{1s} = y_{1s}' \\ y_{2s} = y_{2s}' + d \\ y_{3s} = y_{3s}' \end{cases}$$

$$I_\alpha = \sum_{s=1}^{N} m_s (y_{1s}^2 + y_{2s}^2) = \sum_{s=1}^{N} m_s [y_{1s}'^2 + (y_{2s}' + d)^2]$$

$$= \sum_{s=1}^{N} m_s (y_{1s}'^2 + y_{2s}'^2) + \sum_{s=1}^{N} m_s d^2 + 2 \underbrace{\sum_{s=1}^{N} m_s y_{2s}'}_{= m y_{2G}' \equiv 0} d$$

$$= I_{\alpha G} + m d^2$$

■

Determiniamo ora per un corpo rigido con punto fisso O il momento della quantità di moto $\vec{K}_O$ la cui definizione fornisce

$$\vec{K}_O = \sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_s \times (O - P_s)$$

dove $\bar{v}_s = \bar{\omega} \times (P_s - O)$ perché l'atto di moto è rotatorio.

Riprendiamo l'espressione dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s v_s^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_s \cdot (\bar{\omega} \times (P_s - O))$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s (\bar{\omega} \times (P_s - O)) \cdot \bar{v}_s$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \bar{\omega} \cdot (P_s - O) \times \bar{v}_s$$

$$= \frac{1}{2}\,\overline{\omega}\cdot \sum_{s=1}^{N} m_s\, \overline{v}_s \times (O-P_s) = \frac{1}{2}\,\overline{\omega}\cdot\overline{K}_0$$

Ma abbiamo anche ricavato che

$$T = \frac{1}{2}\, \underset{\sim}{I}_0\overline{\omega}\cdot\overline{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overline{K}_0 = \underset{\sim}{I}_0\overline{\omega}}$$

esplicitando:

$$\overline{K}_0 = \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 \\ I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 \\ I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \end{pmatrix}}$$

Osservazione

Il momento delle quantità di moto $\overline{K}_0$ in generale non ha la stessa direzione di $\overline{\omega}$.

Ciò accade se:

1) l'asse di rotazione è parallelo ad un asse principale d'inerzia.

Per esempio se Oy_1 è asse p. d'inerzia $\Rightarrow$ $I_{12} = I_{13} = 0$

$$\overline{\omega} = (\omega, 0, 0) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{K}_0 = I_{11}\vec{\omega}$$

2) se la matrice è diagonale e i momenti d'inerzia sono uguali $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ e $I_{hk} = 0 \quad h \neq k$.

$$\vec{K}_0 = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = I_{11}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$= I_{11}\vec{\omega}$$

Inoltre se α è un asse fisso per il corpo rigido con punto fisso, o è l'asse di istantanea rotazione

$$\underline{K_\alpha} = \vec{K}_O \cdot \vec{\alpha} = \underline{\underset{\sim}{I}_O \vec{\omega} \cdot \vec{\alpha}} \qquad O \in \alpha$$

se $\bar{\omega} = \omega \bar{\alpha}$

$$\underline{K_\alpha} = \underset{\sim}{I}_O \omega \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} = \omega \underset{\sim}{I}_O \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} = \underline{I_\alpha \omega}$$

RIEPILOGO RISULTATI

$\forall (S, m) \; (P_s, m_s) \; s = 1, \dots, N$

- $\vec{Q} = m \bar{v}_G \quad , \quad \vec{Q}' \equiv \vec{0}$
- $\bar{K}_O = \bar{K}'_G + m \bar{v}_G \times (O - G) \quad , \quad \bar{K}'_G = \bar{K}'_G$
- $T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T'$ dove $T' = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s v_{rs}^2$
- (S, m) è un corpo rigido con punto fisso O.
  - $\bar{K}_O = \underset{\sim}{I}_O \bar{\omega} \quad ; \quad K_\alpha = I_\alpha \omega$ se $\bar{\omega} = \omega \bar{\alpha}$ e $O \in \alpha$
  - $T = \frac{1}{2} \underset{\sim}{I}_O \bar{\omega} \cdot \bar{\omega} \quad ; \quad T = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2$ se $\bar{\omega}$ ha direzione costante
- (S, m) è un corpo rigido senza punti fissi
  - vale König per il MQM e $\bar{K}'_G = \underset{\sim}{I}_G \bar{\omega}$

    o

    $K_{\alpha G} = I_{\alpha G} \omega$ se $\bar{\omega} = \omega \bar{\alpha}$
  - vale König per l'en. cinetica e $T' = \frac{1}{2} \underset{\sim}{I}_G \bar{\omega} \cdot \bar{\omega}$

    o

    $T' = \frac{1}{2} I_{\omega G} \omega^2$ se $\bar{\omega}$ ha dir. costante
  - vale $T = \frac{1}{2} \underset{\sim}{I}_C \bar{\omega} \cdot \bar{\omega}$

    dove C è C.I.R. $(\Rightarrow \bar{v}_C = \bar{0})$ o $T = \frac{1}{2} I_{C\omega} \omega^2$

Riguardo alla matrice d'inerzia si ricava

$$I^{O}_{hk} = I^{G}_{hk} + \sum_{s=1}^{N} m_s \left(\delta_{hk} y_G^2 - y_{hG} y_{kG} \right)$$

per esempio se $h=k=3$

$$I^{O}_{33} = I^{G}_{33} + \sum_{s=1}^{N} m_s \left(y_G^2 - y_{3G} y_{3G} \right)$$

$$= I^{G}_{33} + \sum_{s=1}^{N} m_s \left(y_{1G}^2 + y_{2G}^2 \right) = I^{G}_{33} + m d^2$$

dove d è la distanza tra y_3 e y_3'.

per esempio se $h \neq k$ con $h=1$, $k=2$

$$I^{O}_{12} = I^{G}_{12} - m\, y_{1G} y_{2G}$$

$\Rightarrow$ cercare che $\underset{\sim}{I}^{G}$ sia diagonale, cioè il riferimento solidale col corpo rigido sia ad assi principali d'inerzia.