Teoremi generali della meccanica dei sistemi materiali

Dato un sist. mat. vincolato $\mathcal{B}$: (P_s, m_s) $s=1,\dots,N$

abbiamo visto che

$$m_s \ddot{\vec{x}}^{\,0}_s = \vec{F}_s(x, \dot{x}, t) + \vec{\phi}_s \qquad s=1,..,N \qquad (1)$$

è un sistema di 3N eq. differenziali del 2° ordine che governa il moto di $\mathcal{B}$, dove

$x = (x_1,\dots,x_m)$ parametri indipendenti

$\dot{x} = (\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_m)$ m = grado di libertà

Per molti sistemi materiali, come ad esempio i corpi rigidi non occorre risolvere (1), ma è sufficiente stabilire una legge di evoluzione per i parametri lagrangiani che individuano i gradi di libertà.

Def: Le forze attive o le reazioni vincolari che agiscono su un generico punto P_s di $\mathcal{B}$ sono dette **interne** se dovute all'azione di un altro punto $P_r \in \mathcal{B}$. In caso contrario sono dette **esterne** a $\mathcal{B}$.

- L'insieme delle forze attive interne e delle reazioni vincolari interne a $\mathcal{B}$ costituiscono sempre un sistema di vettori applicati equivalente a zero.

$(\bar{R}^i = \bar{0}, \; \bar{\Omega}_O^i = \bar{0}, \; \bar{\Phi}^i = \bar{0}, \; \bar{\Psi}_O^i = 0)$ (vale il principio di azione/reazione)

Da (1)

$$m_s \dot{\bar{v}}_s = \bar{F}_s^e + \bar{F}_s^i + \bar{\phi}_s^e + \bar{\phi}_s^i$$

sommando in s:

$$\sum_{s=1}^{N} m_s \dot{\bar{v}}_s = \sum_s \bar{F}_s^e + \underbrace{\sum_s \bar{F}_s^i}_{=\bar{0}} + \sum_s \bar{\phi}_s^e + \underbrace{\sum_s \bar{\phi}_s^i}_{=\bar{0}}$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dt}\bar{Q} = \bar{R}^e + \bar{\Phi}^e$$

TEOREMA DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Per qlq sistema materiale

$$\frac{d}{dt}\bar{Q} = \bar{R}^e(x, \dot{x}, t) + \bar{\Phi}^e \tag{2}$$

detto anche 1ª EQUAZIONE CARDINALE DELLA MECCANICA

TEOREMA DEL MOTO DEL BARICENTRO

Per qlq sistema materiale

$$m \dot{\bar{v}}_G = \bar{R}^e(x, \dot{x}, t) + \bar{\Phi}^e \tag{3}$$

segue da $\bar{Q} = m \bar{v}_G$.

N.B.: La (3) non determina il moto del baricentro anche se vengono assegnate le condizioni iniziali poichè $\bar{R}^e$ dipende da $(x, \dot{x})$, che rappresenta lo stato dinamico del sistema, e non dalla posizione e velocità del baricentro.

TEOREMA DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Per qlq sistema materiale si ha:

$$\frac{d}{dt}\bar{K}_O = \bar{\Omega}^e_O(x,\dot{x},t) + \bar{\Psi}^e_O \qquad (4)$$

se O è un punto fisso

se O coincide col baricentro G

se O ha velocità parallela alla velocità di G.

detto anche 2° EQUAZIONE CARDINALE DELLA MECCANICA

Si dimostra partendo da (1) e moltiplicando ogni equazione vettorialmente a destra per $(O-P_s)$

$$m_1\dot{\bar{v}}_1\times(O-P_1) = \bar{F}^e_1\times(O-P_1)+\bar{F}^i_1\times(O-P_1)+\bar{\Phi}^e_1\times(O-P_1) + \bar{\Phi}^i_1\times(O-P_1)$$

$$\vdots$$

$$m_N\dot{\bar{v}}_N\times(O-P_N) = \bar{F}^e_N\times(O-P_N)+\bar{F}^i_N\times(O-P_N)+\bar{\Phi}^e_N\times(O-P_N) + \bar{\Phi}^i_N\times(O-P_N)$$

e poi sommiamo membro a membro:

$$\sum_{s=1}^{N} m_s\dot{\bar{v}}_s\times(O-P_s) = \sum_{s=1}^{N}\bar{F}^e_s\times(O-P_s) + \underbrace{\sum_{s=1}^{N}\bar{F}^i_s\times(O-P_s)}_{=\bar{0}} + \sum_{s=1}^{N}\bar{\Phi}^e_s\times(O-P_s) + \underbrace{\sum_{s=1}^{N}\bar{\Phi}^i_s\times(O-P_s)}_{=\bar{0}}$$

Analizziamo la quantità:

$$\frac{d}{dt}\left[m_s\bar{v}_s\times(O-P_s)\right] = m_s\dot{\bar{v}}_s\times(O-P_s) + m_s\bar{v}_s\times \underbrace{\frac{d}{dt}(O-P_s)}_{=(\bar{v}_O-\bar{v}_s)}$$

perciò

$$m_s \dot{\bar{v}}_s \times (O-P_s) = \frac{d}{dt}\left[m_s \bar{v}_s \times (O-P_s)\right] - m_s \bar{v}_s \times \bar{v}_O + \underbrace{m_s \bar{v}_s \times \bar{v}_s}_{=\bar{O}}$$

e quindi

$$\sum_{s=1}^{N} m_s \dot{\bar{v}}_s \times (O-P_s) = \sum_{s=1}^{N} \frac{d}{dt}\left[m_s \bar{v}_s \times (O-P_s)\right] - \underbrace{\sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_s}_{=\vec{Q}} \times \bar{v}_O$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_s \times (O-P_s)\right] - \vec{Q} \times \bar{v}_O$$

$$= \frac{d}{dt} \bar{K}_O - \vec{Q} \times \bar{v}_O$$

Otteniamo allora

$$\frac{d}{dt} \bar{K}_O = \bar{\Omega}^e_O + \bar{\Psi}^e_O + \vec{Q} \times \bar{v}_O$$

$$= \bar{\Omega}^e_O + \bar{\Psi}^e_O + \underbrace{m \bar{v}_G \times \bar{v}_O}_{=\bar{O} \text{ se } \begin{cases} O \text{ fix} & \bar{v}_O = \bar{O} \\ O \equiv G & \bar{v}_G \times \bar{v}_G = \bar{O} \\ \bar{v}_O \parallel \bar{v}_G & \bar{v}_G \times \bar{v}_O = \bar{O} \end{cases}}$$

TEOREMA DEL MOMENTO ASSIALE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Per qlq sistema materiale si ha:

$$\frac{d}{dt} K_u = \Omega^e_u(x, \dot{x}, t) + \Psi^e_u \qquad (5)$$

dove u è un asse fisso ed $O \in u$.

Moltiplichiamo scalarmente per u la (4)

$$\frac{d}{dt} \bar{K}_O \cdot \bar{u} = \bar{\Omega}^e_O \cdot \bar{u} + \bar{\Psi}^e_O \cdot \bar{u}$$

$\bar{u}$ è versore costante e

$$\frac{d}{dt}[\underbrace{\bar{K}_0 \cdot \bar{u}}_{K_\mu}] = \frac{d}{dt}\bar{K}_0 \cdot \bar{u} + \bar{K}_0 \cdot \underbrace{\frac{d\bar{u}}{dt}}_{\bar{0}}$$

$$\Omega^e_\mu = \Omega^e_0 \cdot \bar{u} \quad , \quad \Psi^e_\mu = \bar{\Psi}^e_0 \cdot \bar{u}.$$

TEOREMA DELLE FORZE VIVE PER UN SISTEMA VINCOLATO

Per un qlq sistema materiale si ha:

$$dT = dL^{(a,e)} + dL^{(a,i)} + dL^{(v,e)} + dL^{(v,i)} \tag{6}$$

Da (1) moltiplichiamo scalarmente per lo spostamento elementare $dP_s = \bar{v}_s\, dt$:

$$m_1 \dot{\bar{v}}_1 \cdot \bar{v}_1\, dt = \bar{F}^e_1 \cdot \bar{v}_1\, dt + \bar{F}^i_1 \cdot \bar{v}_1\, dt + \bar{\Phi}^e_1 \cdot \bar{v}_1\, dt + \bar{\Phi}^i_1 \cdot \bar{v}_1\, dt$$

$$\vdots$$

$$m_N \dot{\bar{v}}_N \cdot \bar{v}_N\, dt = \bar{F}^e_N \cdot \bar{v}_N\, dt + \bar{F}^i_N \cdot \bar{v}_N\, dt + \bar{\Phi}^e_N \cdot \bar{v}_N\, dt + \bar{\Phi}^i_N \cdot \bar{v}_N\, dt$$

sommando membro a membro:

$$\sum_{s=1}^{N} m_s \dot{\bar{v}}_s \cdot \bar{v}_s\, dt = \sum_{s=1}^{N} \bar{F}^e_s \cdot \bar{v}_s\, dt + \sum_{s=1}^{N} \bar{F}^i_s \cdot \bar{v}_s\, dt + \sum_{s=1}^{N} \bar{\Phi}^e_s \cdot \bar{v}_s\, dt + \sum_{s=1}^{N} \bar{\Phi}^i_s \cdot \bar{v}_s\, dt$$

$$= dL^{(a,e)} + dL^{(a,i)} + dL^{(v,e)} + dL^{(v,i)}$$

mentre il primo membro è la variazione dell'energia cinetica $\quad dT = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s v_s^2\right) dt$

(vedi th. forze vive sist. mat. libero)

CASI PARTICOLARI

- Se il sistema materiale è un corpo rigido allora

$$dT = dL^{(a,e)} + dL^{(v,e)}$$

Infatti da $\bar{v}_s = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times (P_s - O)$ si ha:

$$dP_s = dO + \bar{\omega}\, dt \times (P_s - O)$$

$$dL^{(a,i)} = \sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s^{\,i} \cdot \bar{v}_s\, dt = \underbrace{\sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s^{\,i}}_{=\bar{R}^i} \cdot dO + \sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s^{\,i} \cdot \bar{\omega}\, dt \times (P_s - O)$$

$$= \bar{R}^i \cdot dO + \sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s \cdot (O - P_s) \times \bar{\omega}\, dt$$

$$= \bar{R}^i \cdot dO + \underbrace{\sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s \times (O - P_s)}_{=\bar{\Omega}_0^i} \cdot \bar{\omega}\, dt$$

$$= \underset{\bar{0}}{\underset{\shortparallel}{\bar{R}^i}} \cdot dO + \underset{\bar{0}}{\underset{\shortparallel}{\bar{\Omega}_0^i}} \cdot \bar{\omega}\, dt$$

perchè forze interne costituiscono un sistema equivalente a zero

analogamente $dL^{(v,i)} = 0$.

Poichè il vincolo di rigidità è indipendente dal tempo

$$\delta L^{(a,i)} = 0 \qquad \delta L^{(v,i)} = 0$$

- Per un sistema materiale, anche non rigido, a vincoli fissi e bilaterali si ha:

$$dL^{(v)} = dL^{(v,e)} + dL^{(v,i)} = 0$$

Infatti dal principio delle reazioni vincolari

$$\delta L^{(v)} = \sum_{s=1}^{N} \bar{\Phi}_s \cdot \delta P_s \geq 0 \quad \forall \delta P_s$$

segue che per vincoli fissi $\delta P_s = dP_s$

e per vincoli bilaterali il principio è soddisfatto col segno di uguaglianza, perciò:

$$\delta L^{(v)} = dL^{(v)} = 0.$$

- se il sistema mat. è rigido a vincoli fissi e bilaterali

$$dT = dL^{(a,e)}$$

TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA PER SISTEMI VINCOLATI

Se un qlq. sistema materiale, a vincoli fissi e bilaterali, è soggetto a forze conservative con potenziale $\mathcal{U}$ allora

$$dT = dL^{(a)} = dU$$

da cui segue

$$T + V = E$$

Dal th. delle forze vive $dT = dL^{(a)}$, poichè le forze sono conservative $dL^{(a)} = dU$, quindi

$$d(T-U) = 0$$

$\Rightarrow T - U = cost$ e posto $V = -\mathcal{U}$ si ha la tesi, dove

$E = T(t_0) + V(t_0)$.

INTEGRALI PRIMI

Anche per un sistema materiale è possibile dare la definizione di integrale primo di moto come è stato fatto nel capitolo sulla dinamica dei sistemi.

Def: Chiamiamo integrale primo di moto per un sistema mat. retto dalle eq. (1), ogni equazione differenziale del 1° ordine del tipo:

$$\varphi(x, \dot{x}, t) = cost$$

conseguenza diretta di (1) dove

$x = (x_1, \dots, x_m)$ i $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m)$, n grado di libertà

$\downarrow$

parametri lagrangiani

Esempi

① se per un sist. mat $\bar{R}^e$ e $\bar{\Phi}^e$ risultano $\perp$ ad una retta di versore costante $\bar{u}$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} \cdot \bar{u} = \underset{\overset{\parallel}{0}}{\bar{R}^e \cdot \bar{u}} + \underset{\overset{\parallel}{0}}{\bar{\Phi}^e \cdot \bar{u}}$$

e

$$\frac{d}{dt} Q_u = \frac{d}{dt}[\bar{Q} \cdot \bar{u}] = \frac{d\bar{Q}}{dt} \cdot \bar{u} + \bar{Q} \cdot \underset{\overset{!!!}{0}}{\frac{d\bar{u}}{dt}}$$

quindi si ha

$$Q_u = \bar{Q} \cdot \bar{u} = costante$$

o anche

$$\bar{v}_G \cdot \bar{u} = cost$$ (1) int. primo di moto

poichè $\bar{Q} = m\bar{v}_G$.

② se per un sist. mat. risulta $\bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0}$ allora

$$\bar{Q} = m\bar{v}_G = \overrightarrow{cost}$$ corrisponde a 3 int. primi di moto

③ Se per un sist. materiale si ha $\Omega^e_u + \Psi^e_\mu = 0$ allora vale

$$\frac{d}{dt} k_u = 0$$

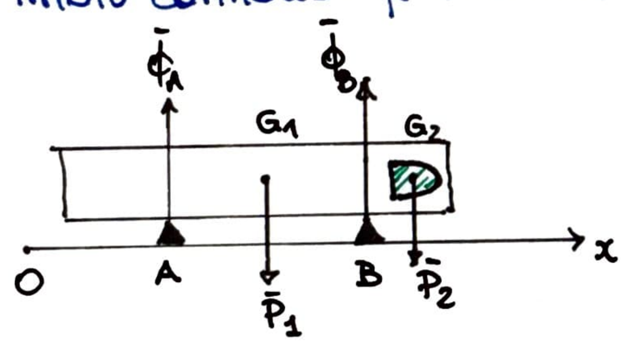
quindi

$$k_u(x, \dot{x}, t) = cost$$ 1 int. primo di moto

④ se il sist. mat. è a vincoli fissi e bilaterali e le forze attive agenti sul sistema sono conservative allora vale

$$T + V = E = T_0 + V_0$$ 1 int. primo di moto

- esempio di conservazione della quantità di moto: moto cannone-proiettile



$$M \bar{v}_G = m_1 \bar{v}_{G_1} + m_2 \bar{v}_{G_2}$$

$$\vec{P}_i, \bar{\Phi}_A, \bar{\Phi}_B \perp Ox$$

$$\Rightarrow M \bar{v}_G \cdot \bar{i} = cost$$

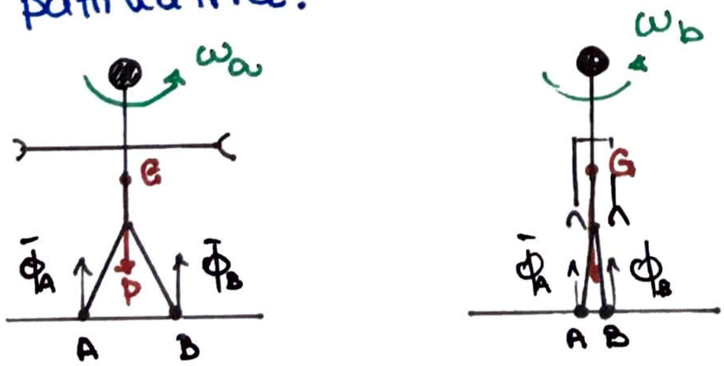
cioè $\dot{x}_G = cost = \dot{x}_G(0)$

se il sistema inizialmente è fermo $\dot{x}_G(0) = 0$ e

quindi $\dot{x}_G(t) = 0 \Rightarrow x_G(t) = x_G(0)$

cioè le forze interne dovute allo scoppio non influenzano il moto del baricentro (effetto del rinculo)

- esempio di conservazione del momento della q. di moto: pattinatrice.



La retta u ∥ Oz.

$$k_u = k_z = I_z \omega = cost$$

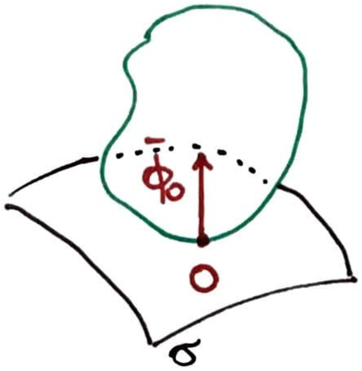
$$I_z^a > I_z^b$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\omega}_a < \vec{\omega}_b$$

ESEMPI DI VINCOLI ESTERNI AD UN CORPO RIGIDO

① C.R. appoggiato ad una superficie in un solo punto O



Il vincolo appoggio si realizza mediante un'unica reazione $\vec{\Phi}$ applicata in O:

$(O, \bar{\Phi}_0)$

Dal P.R.V. :

$$\delta L^{(v)} = \underbrace{\delta L^{(v,i)}}_{\substack{\equiv \\ 0 \\ \text{v. di rigidità}}} + \bar{\Phi}_0 \cdot \delta O \geq 0$$

$\Rightarrow \bar{\Phi}_0 \perp \sigma$ in O con verso esterno a σ: $\bar{\Phi}_0 = \Phi_0 \bar{N}$

Il vincolo appoggio introduce 1 incognita scalare nelle eq. di moto : $|\bar{\Phi}_0|$

② C.R. con punto fisso O realizzato mediante cerniera sferica

Il vincolo punto fisso si schematizza con una reazione $\vec{\Phi}$ applicata in O di direzione arbitraria

$(O, \bar{\Phi}_0)$

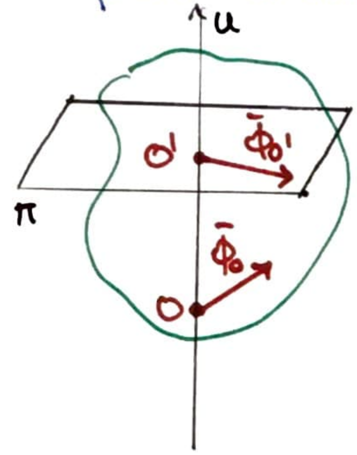
Dal P.R.V. :

$$\delta L^{(v)} = \underbrace{\delta L^{(v,i)}}_{\substack{\equiv \\ 0 \\ \text{v. rigidità}}} + \bar{\Phi}_0 \cdot \underbrace{\delta O}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{fisso}}} + \underbrace{\bar{\Psi}_0}_{\substack{\parallel \\ \bar{0}}} \cdot \omega \delta t \geq 0$$

Il vincolo punto fisso introduce 3 incognite scalari nelle eq. di moto : le 3 componenti di $\bar{\Phi}_0$

$$\bar{\Phi}_0 = \Phi_{0x} \bar{i} + \Phi_{0y} \bar{j} + \Phi_{0z} \bar{k}$$

③ C.R. con asse fisso realizzato mediante una cerniera sferica e una cerniera cilindrica



cerniera sferica in O $\Rightarrow \bar{\Phi}_O$ arbitraria

cerniera cilindrica in O' $\Rightarrow \bar{\Phi}_{O'} \in \pi \ (\perp u)$

Dal P.R.V.

$$\delta L^{(v)} = \underbrace{\delta L^{(v,i)}}_{=0} + \bar{\Phi}_O \cdot \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\delta O}} + \bar{\Phi}_{O'} \cdot \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\delta O'}} + \bar{\Psi}^e_O \cdot \bar{\omega}\,\delta t \geq 0$$

$$\bar{\Psi}^e_O = \bar{\Phi}_O \times \underbrace{(O-O)}_{=0} + \bar{\Phi}_{O'} \times (O-O')$$

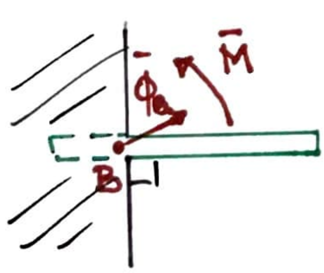
$$\Psi^e_u = \bar{\Psi}^e_O \cdot \bar{u} = \bar{\Phi}_{O'} \times (O-O') \cdot \bar{u} = \bar{\Phi}_{O'} \cdot \underbrace{(O'-O) \times \bar{u}}_{=0} \equiv 0$$

Il vincolo asse fisso introduce 5 incognite scalari

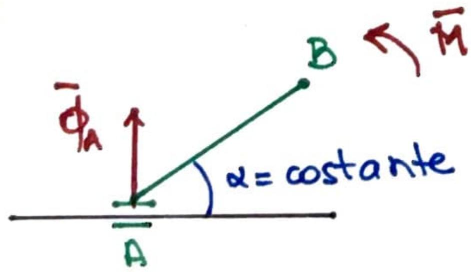
$$\begin{cases} \bar{\Phi}_O = \Phi_{Ox}\bar{i} + \Phi_{Oy}\bar{j} + \Phi_{Oz}\bar{k} \\ \bar{\Phi}_{O'} = \Phi_{O'x}\bar{i} + \Phi_{O'y}\bar{j} \end{cases}$$

Se il vincolo fosse realizzato con 2 cerniere sferiche allora le incognite scalari sarebbero 6.

④ Incastro realizzato mediante una reazione applicata nel punto d'incastro più una coppia di momento $\bar{M}$.



⑤



EQUAZIONI CARDINALI PER SISTEMI RIGIDI

Le equazioni cardinali (2) e (4) sono necessarie nello studio del moto dei sistemi materiali, ma in generale non sono sufficienti, se non per sistemi rigidi.

Teorema: Per un sistema rigido le equazioni cardinali (2) e (4) sono necessarie e sufficienti per studiare il moto del sistema.

La dimostrazione necessita metodi della Meccanica Analitica che vedremo in seguito.

ESEMPI

① C.R. LIBERO

Ha 6 gradi di libertà (tranne le aste che nè hanno 5)

Sono necessarie 6 equazioni:

$$\frac{d}{dt}\bar{Q}^{\bullet} = \bar{R}^e(x, \dot{x}, t) \quad 3$$

$$\frac{d}{dt}\bar{K}_o = \bar{\Omega}^e_o(x, \dot{x}, t) \quad 3$$

② C.R. CON PUNTO FISSO O

Ha 3 gradi di libertà. Il moto è descritto da:

$$\frac{d}{dt}\bar{K}_o = \bar{\Omega}^e_o(x, \dot{x}, t) \quad 3$$

mentre per determinare $\bar{\Phi}_o$ si utilizza:

$$\bar{\Phi}_o = \frac{d\bar{Q}}{dt} - \bar{R}^e(x, \dot{x}, t) \quad 3$$

③ C.R. CON ASSE FISSO u

Ha 1 grado di libertà. Il moto è descritto da:

$$\frac{d}{dt}K_u = \Omega^e_u(x, \dot{x}, t) \quad 1$$

Per determinare $\bar{\Phi}_O$ e $\bar{\Phi}_{O'}$ si utilizzano:

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_O + \bar{\Phi}_{O'} = \dfrac{d}{dt}\bar{Q} - \bar{R}^e(x, \dot{x}, t) & 3 \\ \bar{\Psi}^e_O = \dfrac{d}{dt}\bar{K}_O - \bar{\Omega}^e_O(x, \dot{x}, t) & \text{proiettata sugli assi} \perp \text{ad } u \text{ di un rif. cart. ortog.} \end{cases}$$

2