STATICA

Dato un sistema materiale la cui posizione è individuata dall'n-pla $x = (x_1, \dots, x_n)$ e con atto di moto individuato da $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ (n = g. di libertà), diamo la seguente definizione:

Def: Una configurazione x_e di un sistema materiale è detta di equilibrio se posto il sistema inizialmente in x_e, cioè:

$$x(0) = x_e$$

con atto di moto nullo, cioè $\dot{x}(0) = 0$, allora il sistema rimane sempre in x_e e quindi:

$$x(t) = x_e \, , \quad \forall t \geq 0.$$

(il moto corrispondente è la quiete).

Se x_e è pos. di equilibrio per un sist. mat. a vincoli fissi allora segue dalle eq. cardinali della dinamica che $\forall t \geq 0$:

$$\begin{cases} \vec{R}^e(x_e, 0, t) + \vec{\Phi}^e = \vec{0} \\ \vec{\Omega}^e_o(x_e, 0, t) + \vec{\Psi}^e_o = \vec{0} \end{cases}$$

dette EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA.

- Le eq. cardinali della statica sono necessarie affinché una posizione x_e sia di equilibrio e si dimostra che sono anche sufficienti se il corpo è rigido e a vincoli fissi.

Esempi

a) corpo rigido libero.

Ovviamente $\bar{\Phi}^e = \bar{0}$, $\bar{\Psi}^e_0 = \bar{0}$, quindi:

$$\vec{R}^e(x_e, 0, t) = \vec{0}, \quad \vec{\Omega}^e_0(x_e, 0, t) = \vec{0}$$

corrispondono a 6 eq. scalari (6 sono i g.d.l.)

b) corpo rigido con punto fisso O

Si ha $\vec{\Psi}^e_0 = \vec{0}$, quindi:

$$\vec{\Omega}^e_0(x_e, 0, t) = \vec{0}$$

corrisponde a 3 eq. scalari (3 sono i g. di libertà)

mentre

$$\vec{\Phi}_0 = -\vec{R}^e(x_e, 0, t)$$

permette di determinare la reazione vincolare in O all'equilibrio.

c) corpo rigido con asse fisso u

Si ha $\Psi^e_u = 0$, quindi:

$$\Omega^e_u(x_e, 0, t) = 0$$

corrisponde ad 1 eq. scalare (1 è il g. di libertà)

- Se il vincolo asse fisso è realizzato mediante un punto fisso O (cerniera sferica) e un cuscinetto O' (cerniera cilindrica), le reazioni esplicate dal vincolo sono date da:

$$(O, \vec{\phi}) \quad , \quad (O', \vec{\phi}') \qquad \vec{\phi}' \perp u$$

Le eq. cardinali:

$$\begin{cases} \vec{\phi}^e (= \vec{\phi} + \vec{\phi}') = -\vec{R}^e(x_e, 0, t) \\ \vec{\psi}_O^e (= (O' - O) \times \vec{\phi}') = -\vec{\Omega}_O^e (x_e, 0, t) \end{cases}$$

corrispondono a 6 eq. scalari. Se scegliamo $u = Ox_3$, le prime 5 permettono di determinare le 3 componenti di $\vec{\phi}_O$ $(\phi_{Ox_1}, \phi_{Ox_2}, \phi_{Ox_3})$ e le 2 componenti di $\vec{\phi}'_{O'}$ $(\phi'_{O'x_1}, \phi'_{O'x_2})$, mentre l'ultima fornisce la posizione di equilibrio.

- Se in O' ci fosse una cerniera sferica, non sarebbe possibile determinare esattamente $\vec{\phi}$ e $\vec{\phi}'$ poichè il n° delle incognite (6) è superiore al n° delle equazioni scalari (5), anche se le posizioni di equilibrio non variano e sono calcolate sempre tramite:

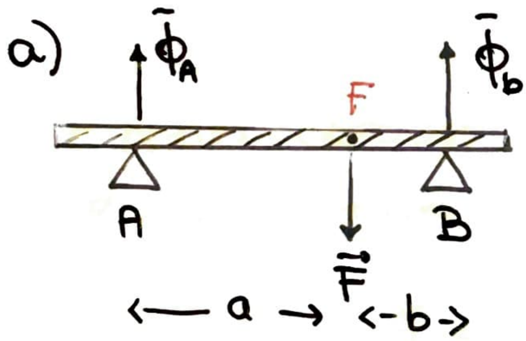
$$\Omega_u^e \equiv \Omega_{x_3}^e (x_e, 0, t) = 0 .$$

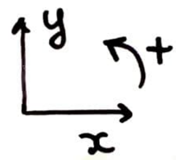
Def.: Un sistema in cui è possibile calcolare esattamente le reazioni vincolari in corrispondenza delle posizioni di equilibrio è detto staticamente determinato. (sistema isostatico)

Nell'esempio, nel secondo caso il sist. è staticamente indeterminato. (sistema iperstatico)

Esempi

a)





$$\begin{cases} \bar{\Phi}_A + \bar{\Phi}_B + \vec{F} = \vec{0} \\ \cancel{\bar{\Omega}^e_F} + \bar{\Psi}^e_F = \vec{0} \end{cases}$$

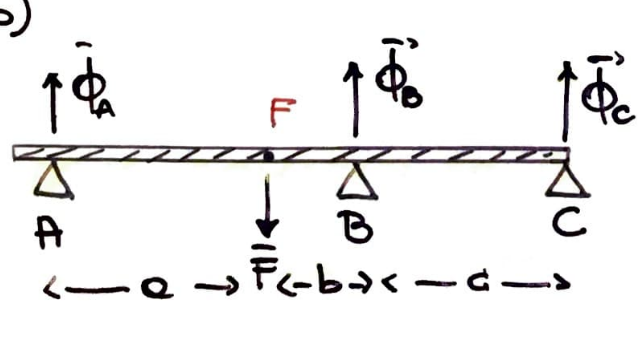
Proietto:
$$\begin{cases} \Phi_A + \Phi_B - F = 0 \\ -a\,\Phi_A + b\,\Phi_B = 0 \end{cases}$$

$\Phi_A = \frac{b}{a}\Phi_B$ sostituita nella prima:

$$\begin{cases} \Phi_B = \dfrac{a}{a+b} F \\ \Phi_A = \dfrac{b}{a+b} F \end{cases}$$

ISOSTATICO

b)



$$\begin{cases} \Phi_A + \Phi_B + \Phi_C - F = 0 \\ -a\,\Phi_A + b\,\Phi_B + (b+c)\,\Phi_C = 0 \end{cases}$$

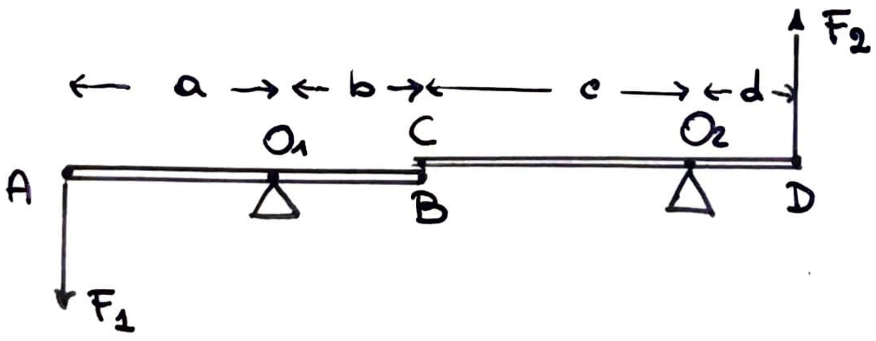
2 eq. in 3 incognite

IPERSTATICO

SISTEMI DI CORPI RIGIDI
(SVINCOLAMENTO)

Per sistemi costituiti da corpi rigidi tra loro vincolati le equazioni cardinali (della dinamica o della statica) applicate a tutto il sistema non consentono in generale uno studio completo del moto o delle posizioni di equilibrio.
Per risolvere il problema bisogna svincolare i corpi rigidi costituenti il sistema ed applicare ad ognuno di essi le equazioni cardinali (della dinamica o della statica) a patto di sostituire i vincoli dovuti alla presenza degli altri corpi con le relative reazioni vincolari.

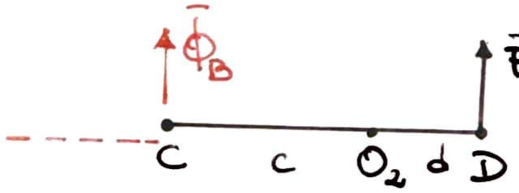
Esempio
Ricavare la condizione di equilibrio per il seguente sistema (2 leve)



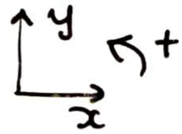
L'asta AB esercita sull'asta CD una reazione Φ_B e l'asta CD esercita su AB una reazione Φ_C.

Per il principio di azione e reazione

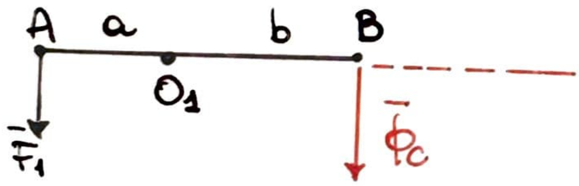
$$\vec{\Phi}_C = -\vec{\Phi}_B$$



$$\vec{\Omega}^e_{O_2} + \bar{\Psi}^e_{O_2} = \bar{0}$$



$$-c\,\Phi_B + d\,F_2 = 0$$



$$\bar{\Omega}^e_{O_1} + \bar{\Psi}^e_{O_1} = \bar{0}$$

$$a\,F_1 - b\,\Phi_C = 0$$

Dalla 1ª: $\Phi_B = \dfrac{d}{c} F_2$

Dalla 2ª: $\Phi_C = \dfrac{a}{b} F_1$

$\bar{\Phi}_B$ e $\bar{\Phi}_C$ hanno ugual modulo, stessa direzione e verso opposto.

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{bd}{ac}$$

Per calcolare Φ_{O1}, Φ_{O2} considero l'intero sistema

$$\begin{cases} \bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{O1} + \Phi_{O2} - F_1 + F_2 = 0 \\ \bar{\Omega}^e_{O1} + \bar{\Psi}^e_{O1} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad a F_1 + (b+c)\Phi_{O2} + (b+c+d) F_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_{O2} = -\dfrac{a F_1 + (b+c+d) F_2}{b+c} \\[2ex] \Phi_{O1} = \dfrac{(a+b+c) F_1 + d F_2}{b+c} \end{cases}$$