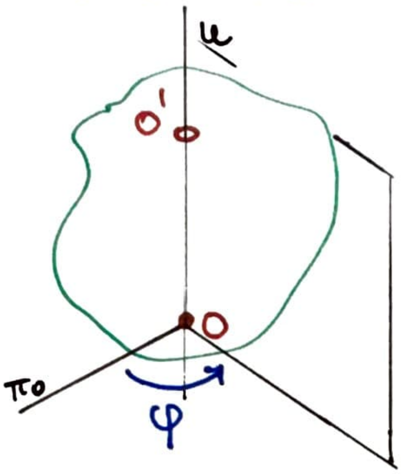
MOTO DI UN CORPO RIGIDO CON ASSE FISSO



1 grado di libertà

$q=\varphi$ parametro lagrangiano

Il moto è descritto da:

$$\frac{d}{dt} k_u = \Omega^e_u$$

Poiché $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{u}$ e $k_u = I_u \omega = I_u \dot{\varphi}$ si ottiene:

$$\underline{I_u \ddot{\varphi} = \Omega^e_u(\varphi, \dot{\varphi}, t)}$$

E' possibile calcolare il valore delle reazioni vincolari quando il vincolo è realizzato mediante cerniera sferica e cerniera cilindrica. Negli altri casi si può solo determinare il valore di $\bar{\Phi}^e$ e $\bar{\Psi}^e_O$ da:

$$\begin{cases} \bar{\Phi}^e = m\bar{a}_G - \bar{R}^e(\varphi, \dot{\varphi}, t) \\ \bar{\Psi}^e_O = \frac{d}{dt}\bar{k}_O - \bar{\Omega}^e_O(\varphi, \dot{\varphi}, t) \end{cases}$$

Il risultante e il momento risultante delle reazioni vincolari esterne contengono, oltre ad un termine dovuto alle forze attive esterne, anche uno di origine cinetica, dovuto al moto del sistema.
Questi termini sono detti CIMENTI VINCOLARI.

Termine $m\bar{a}_G$: $\bar{a}_G = \bar{0} \iff G \in$ asse u.

Se $G \notin u$ sia d la sua distanza dall'asse u.

$$\bar{a}_G = \ddot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n} \quad \text{dove } s = d\varphi \text{ e } \rho = d$$

$\boxed{\text{se } \dot\varphi = \text{cost}}$

$$m\,|\bar a_G| = m\,d\,\dot\varphi^2$$

quindi $\bar a_G = \bar o$ se $d = 0$.

Termine $\frac{d\bar K_O}{dt}$: scelta una terna solidale col C.R. in cui il terzo asse è u $\Rightarrow$ $\bar u = \bar J_3$ fisso

$$\Rightarrow \bar\omega = \omega \bar J_3 = \underset{\substack{\parallel \\ \text{costante}}}{\dot\varphi}\, \bar J_3$$

Dalla relazione

$$\bar K_O = \underset{\sim}{I}_O\, \bar\omega$$

si ricava:

$$\bar K_O = I_{13}\dot\varphi\, \bar J_1 + I_{23}\dot\varphi\, \bar J_2 + I_{33}\dot\varphi\, \bar J_3$$

$$\frac{d}{dt}\bar K_O = I_{13}\dot\varphi \underbrace{\frac{d}{dt}\bar J_1}_{=\bar\omega\times\bar J_1} + I_{23}\dot\varphi \underbrace{\frac{d}{dt}\bar J_2}_{=\bar\omega\times\bar J_2} + I_{33}\dot\varphi \underbrace{\frac{d}{dt}\bar J_3}_{=\bar o}$$

$$= I_{13}\dot\varphi^2\, \bar J_3\times\bar J_1 + I_{23}\dot\varphi^2\, \bar J_3\times\bar J_2$$

$$= \dot\varphi^2 \left(I_{13}\bar J_2 - I_{23}\bar J_1 \right)$$

Pertanto

$\frac{d\bar K_O}{dt} = \bar o \iff I_{13} = I_{23} = 0$ cioè u è asse principale d'inerzia

In caso contrario

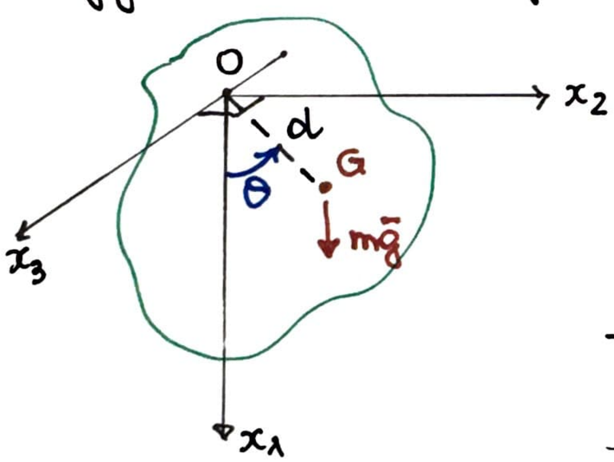
$$\frac{d}{dt}\bar K_O \perp \bar u$$

e l'effetto della rotazione comporta la presenza di una coppia che agisce sull'asse e tende a farlo ruotare nella direzione di $\frac{d}{dt}\bar K_O$.

Per rendere minimi gli effetti della rotazione è opportuno che il baricentro appartenga all'asse fisso e che tale asse sia principale d'inerzia.

PENDOLO FISICO

E' un corpo rigido, con un asse fisso che è non verticale e non baricentrico, chiamato asse di sospensione, soggetto alla sola forza peso.



Il moto è retto da:

$$I_u \ddot{\theta} = \Omega^e_u(\theta, \dot{\theta}, t)$$

$$\bar{\Omega}^e_0 = (G-O) \times m\bar{g}$$

$$\Omega^e_u = (G-O) \times m\bar{g} \cdot \bar{u}$$

caso a) $u = Ox_3$

$$\bar{\Omega}^e_0 = -d\,mg \operatorname{sen}\theta\, \bar{u}$$

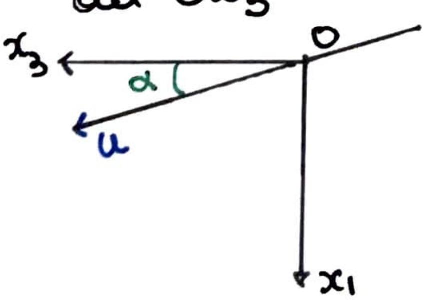
$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_u} \sin\theta = 0$$

$$\frac{mgd}{I_u} = g/l \quad \text{dove } l = \frac{I_u}{md}$$

ottengo l'eq. del pendolo semplice:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 \quad \text{dove } \omega^2 = g/l$$

caso b) supponiamo u inclinato di un angolo α rispetto ad Ox_3



$$\bar{\Omega}^e_0 \cdot \bar{u} = -mgd \sin\theta\, \bar{I}_3 \cdot \bar{u}$$

$$= -mgd \sin\theta \cos\alpha$$

$$l = \frac{I_u}{md \cos\alpha}$$

riottengo l'equazione

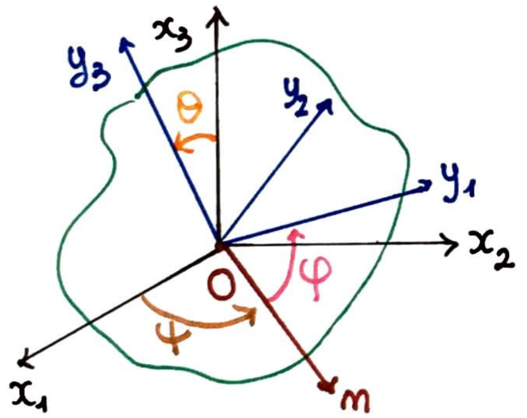
$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 \qquad \omega^2 = g/\ell \quad e \quad \ell = \frac{I_u}{m d \cos\alpha}$$

Il periodo delle oscillazioni del pendolo fisico:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_u}{m d \cos\alpha\, g}}$$

Noti T, m, d, g si può calcolare I_u.

MOTO DI UN CORPO RIGIDO CON PUNTO FISSO



3 gradi di libertà

(θ, φ, ψ) angoli di Eulero

Equazioni del moto:

$$\frac{d}{dt}\bar{K}_O = \bar{\Omega}^e_O$$

$$\bar{\Omega}^e_O = \bar{\Omega}^e_O(\theta, \varphi, \psi, \underbrace{\omega_1, \omega_2, \omega_3}, t)$$

equazioni cinematiche di Eulero

rispetto al rif $Oy_1y_2y_3$ solidale col C.R. scelto ad assi principali d'inerzia:

$$\bar{K}_O = I_{11}\omega_1 \bar{J}_1 + I_{22}\omega_2 \bar{J}_2 + I_{33}\omega_3 \bar{J}_3$$

$$\frac{d}{dt}\bar{K}_O = I_{11}\dot{\omega}_1 \bar{J}_1 + I_{22}\dot{\omega}_2 \bar{J}_2 + I_{33}\dot{\omega}_3 \bar{J}_3 +$$

$$I_{11}\omega_1 \frac{d}{dt}\bar{J}_1 + I_{22}\omega_2 \frac{d}{dt}\bar{J}_2 + I_{33}\omega_3 \frac{d}{dt}\bar{J}_3$$

ma $\frac{d}{dt}\bar{J}_K = \bar{\omega} \times \bar{J}_K$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\bar{K}_O = \sum_{K=1}^{3} I_{KK}\dot{\omega}_K \bar{J}_K + \bar{\omega} \times \bar{K}_O$$

Proiettando sugli assi del riferimento:

$$\begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1 + (I_{33}-I_{22})\,\omega_2\omega_3 = \Omega^e_{oy_1}(\varphi,\theta,\psi,\omega_1,\omega_2,\omega_3,t) \\ I_{22}\dot{\omega}_2 + (I_{11}-I_{33})\,\omega_1\omega_3 = \Omega^e_{oy_2}(\quad '' \quad) \\ I_{33}\dot{\omega}_3 + (I_{22}-I_{11})\,\omega_1\omega_2 = \Omega^e_{oy_3}(\quad '' \quad) \end{cases}$$

otteniamo tre eq. differenziali chiamate equazioni dinamiche di Eulero.

Le eq. cinematiche e le eq. dinamiche di Eulero costituiscono un sistema di 6 eq. in 6 incognite.

Note le condizioni iniziali:

$$\theta(0)=\theta_0, \quad \varphi(0)=\varphi_0, \quad \psi(0)=\psi_0$$

$$\omega_1(0)=\omega_{10}, \quad \omega_2(0)=\omega_{20}, \quad \omega_3(0)=\omega_{30}$$

il moto del C.R. con pto fisso è univocamente determinato.

Se $\bar{\Omega}^e_o$ è indipendente da (θ,φ,ψ) allora le eq. dinamiche di Eulero permettono di determinare l'atto di moto del C.R. tramite la funzione $\bar{\omega}=\bar{\omega}(t)$

Poi attraverso le equazioni cinematiche di Eulero è possibile determinare l'evoluzione degli angoli di Eulero.

MOTO PER INERZIA O ALLA POINSOT

È il moto di un C.R. con punto fisso in cui le forze attive applicate al corpo hanno momento nullo rispetto al punto fisso.
(p. es: C.R. avente $O \equiv G$ e soggetto alla sola forza peso)

Dalla 2ª eq. cardinale poiché $\bar{\Psi}^e_O = \bar{0}$ e $\bar{\Omega}^e_O = \bar{0}$

$$\frac{d}{dt}\bar{K}_O = \bar{0} \implies \underline{\bar{K}_O = \overrightarrow{cost}}$$

1° integrale primo di moto

Dal teorema delle forze vive

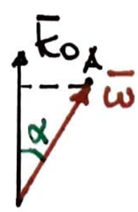
$$dT = dL = \underbrace{\bar{R}^e \cdot dO}_{=\bar{0}} + \underbrace{\bar{\Omega}^e_O}_{=\bar{0}} \cdot \bar{\omega}\, dt + \underbrace{\bar{\Phi}^e}_{=\bar{\Phi}_O} \cdot \underbrace{dO}_{=\bar{0}} + \underbrace{\bar{\Psi}^e_O}_{=\bar{0}} \cdot \bar{\omega}\, dt = 0$$

($dL^i = 0$ perché il corpo è rigido)

$\implies \underline{T = cost = T_O}$ 2° integrale primo di moto

ma anche vale

$$T = \frac{1}{2}\bar{K}_O \cdot \bar{\omega}$$



quindi

$$\frac{1}{2} K_O\, \omega \cos\alpha = T_O$$

cioè

$$\underline{\omega\cos\alpha = \frac{2T_O}{K_O} = cost}$$

$\implies$ la proiezione di $\bar{\omega}$ lungo la direzione di $\bar{K}_O$ si mantiene costante $\implies$ il pto $A \in$ piano invariabile π, $\perp$ a $\bar{K}_O$ detto piano di Laplace.

Scelto il rif. solidale col C.R. ad assi principali d'inerzia si ha:

$$\bar{K}_O = I_{11}\,\omega_1\,\bar{J}_1 + I_{22}\,\omega_2\,\bar{J}_2 + I_{33}\,\omega_3\,\bar{J}_3 = cost$$

$$T = \frac{1}{2}\left(I_{11}\,\omega_1^2 + I_{22}\,\omega_2^2 + I_{33}\,\omega_3^2\right) = T_0 = E$$

$\Rightarrow$

$$\frac{I_{11}}{2E}\,\omega_1^2 + \frac{I_{22}}{2E}\,\omega_2^2 + \frac{I_{33}}{2E}\,\omega_3^2 = 1 \qquad (*)$$

rappresenta geometricamente un ellissoide che ha gli assi di quello d'inerzia

Si può dimostrare che la normale $\bar{n}$ a questo ellissoide è parallela a $\bar{K}_O$ e che l'ellissoide è tangente al piano π nel punto d'incidenza A, che appartiene all'asse di istantanea rotazione.

$\Rightarrow$ Il moto dell'ellissoide sul piano π è di rotolamento senza strisciamento.

TEOREMA DI POINSOT : Durante il moto per inerzia del C.R. con pto fisso, l'ellissoide con origine in O (*) rotola senza strisciare su un piano fisso π ortogonale al vettore costante $\bar{K}_O$.

Gli assi principali d'inerzia sono assi permanenti di rotazione (se il C.R. viene messo in rotazione attorno ad un asse principale d'inerzia, vi permane per tutti gli istanti successivi)

- CASO PARTICOLARE $I_{11} = I_{22} \neq I_{33}$

Dalle equazioni dinamiche di Eulero si ricava:

$$\begin{cases} I_{11}\,\dot{\omega}_1 + (I_{33} - I_{11})\,\omega_2\,\omega_3 = 0 \\ I_{11}\,\dot{\omega}_2 + (I_{11} - I_{33})\,\omega_1\,\omega_3 = 0 \\ I_{33}\,\dot{\omega}_3 = 0 \end{cases}$$

Dalla 3ª $\Rightarrow$ $\omega_3 = cost$

$$\bar K_O = I_{11}\omega_1 \bar J_1 + \underset{\overset{\|}{I_{11}}}{I_{22}}\omega_2 \bar J_2 + I_{33}\omega_3 \bar J_3 + I_{11}\omega_3 \bar J_3 - I_{11}\omega_3 \bar J_3$$

$$= I_{11}(\omega_1 \bar J_1 + \omega_2 \bar J_2 + \omega_3 \bar J_3) + (I_{33} - I_{11})\omega_3 \bar J_3$$

$$= I_{11}\bar\omega + (I_{33} - I_{11})\omega_3 \bar J_3$$

Da cui ricavo:

$$\bar\omega = \underbrace{\frac{\vec K_O}{I_{11}}}_{\text{costante}} + \frac{(I_{11} - I_{33})\overbrace{\omega_3}^{\text{costante}}}{I_{11}}\bar J_3$$

quindi l'atto di moto rotatorio è del tipo:

$$\bar\omega = \bar\Omega_1 + \bar\Omega_2$$

cioè il moto è di PRECESSIONE.

$\bar\Omega_1 = \dfrac{\bar K_O}{I_{11}}$ vettore costante diretto secondo l'asse di precessione p

$\bar\Omega_2 = \dfrac{(I_{11} - I_{33})}{I_{11}}\omega_3 \bar J_3$ vettore costante in modulo diretto secondo un asse solidale col C.R. cioè l'asse di figura f

Poichè anche $\bar\omega$ è costante $\Rightarrow$ moto di precessione regolare.

(vedi CONI DI POINSOT)