MECCANICA ANALITICA

Ricordiamo l'equazione fondamentale della dinamica dei sistemi vincolati applicata ad ogni punto (P_s, m_s) del sistema:

$$m_s \dot{\bar{v}}_s = \bar{F}_s(x, \dot{x}, t) + \bar{\Phi}_s \qquad s = 1, \dots, N \qquad (1)$$

e il Principio delle Reazioni Vincolari

$$\sum_{s=1}^{N} \bar{\Phi}_s \cdot \delta P_s \geq 0 \ , \ \forall \delta P_s \qquad (2)$$

L'obiettivo di questo capitolo è sviluppare un procedimento che consenta di sintetizzare i contenuti di (1) e (2) in modo da pervenire ad un unico Principio che non contenga le reazioni vincolari che sono grandezze incognite.

Dalla (1) evidenziamo il termine

$$-\bar{\Phi}_s = \underbrace{\bar{F}_s(x, \dot{x}, t) - m_s \dot{\bar{v}}_s}_{\text{forza perduta}}$$

e utilizzando (2) si ha:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{N} \left[\bar{F}_s(x, \dot{x}, t) - m_s \dot{\bar{v}}_s \right] \cdot \delta P_s \leq 0, \ \forall \delta P_s, \ \forall t > 0} \qquad (3)$$

chiamata RELAZIONE SIMBOLICA DELLA DINAMICA

La disuguaglianza (3) è soltanto necessaria nello studio del moto di un qualunque sistema materiale, ma, se applicato ad un qualsiasi sistema materiale, consente sempre di determinarne il moto.
Pertanto è lecito ritenere che essa sia in grado di riassumere in sè tutte le proprietà del moto e vale

PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

Dato un sistema materiale la cui generica configurazione x è individuata da n parametri (quindi $x=(x_1,\dots,x_n)$) C.N.S. affinchè una funzione

$$\hat{x}:[0,T]\to\mathbb{R}^n$$

sia un moto possibile per il sistema, è che sia verificata la relazione simbolica della dinamica (3), $\forall t\in[0,T]$ e $\forall\, \delta P_s$, cioè il lavoro virtuale delle forze perdute sia sempre non positivo.

N.B.: Se gli spostamenti virtuali sono tutti invertibili (cioè $-\delta P_s$ è uno spostamento virtuale) e ciò equivale a dire che i vincoli sono bilaterali, allora la relazione (3) diventa un'equazione chiamata equazione simbolica della dinamica.

In base al Principio di D'Alembert è possibile dimostrare che le Equazioni Cardinali della Dinamica sono sufficienti per lo studio del moto di un sistema materiale rigido a vincoli bilaterali /unilaterali

TEOREMA: Segue dal Principio di D'Alembert che le Equazioni Cardinali della Dinamica insieme con il Principio delle Reazioni Vincolari, sono SUFFICIENTI per lo studio di un sistema materiale rigido (a vincoli unilaterali/bilaterali).

cioè le eq. cardinali + PRV $\Rightarrow$ P. di D'Alembert.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\bar{Q} = \bar{R}^e + \bar{\Phi}^e \\ \dfrac{d}{dt}\bar{K}_O = \bar{\Omega}^e_O + \bar{\Psi}^e_O \quad (O \text{ fix}, \; O \equiv G, \; \bar{v}_O \parallel \bar{v}_G) \end{cases}$$

$+$

$$\sum_{s=1}^{N} \bar{\Phi}_s \cdot \delta P_s \geq 0, \; \forall \delta P_s$$

Poichè il corpo è rigido

$$\delta P_s = \delta O + \bar{\omega}\,\delta t \times (P_s - O)$$

$$0 \leq \sum_{s=1}^{N} \bar{\Phi}_s \cdot \delta O + \sum_{s=1}^{N} \bar{\Phi}_s \cdot \bar{\omega}\,\delta t \times (P_s - O) =$$

$$= \bar{\Phi} \cdot \delta O + \bar{\Psi}_O \cdot \bar{\omega}\,\delta t$$

$$= \bar{\Phi}^e \cdot \delta O + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\bar{\Phi}^i} \cdot \delta O + \bar{\Psi}^e_O \cdot \bar{\omega}\,\delta t + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\bar{\Psi}^i_O} \cdot \bar{\omega}\,\delta t =$$

per il P.A.R.

$$= \left(\frac{d}{dt}\bar{Q} - \bar{R}^e\right) \cdot \delta O + \left(\frac{d}{dt}\bar{K}_O - \bar{\Omega}^e_O\right) \cdot \bar{\omega}\,\delta t \qquad (\bullet)$$

Partendo dalla relazione simbolica della dinamica

$$\delta L^{perdute} = \sum_{s=1}^{N} (\bar F_s - m_s \bar a_s)\cdot \delta P_s$$

$$= \sum_{s=1}^{N} (\bar F_s - m_s \bar a_s)\cdot [\delta O + \bar\omega \delta t \times (P_s - O)]$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \bar F_s \cdot \delta O + \sum_{s=1}^{N} \bar F_s \cdot \bar\omega \delta t \times (P_s - O) +$$

$$- \sum_{s=1}^{N} m_s \bar a_s \cdot \delta O - \sum_{s=1}^{N} m_s \bar a_s \cdot \bar\omega \delta t \times (P_s - O)$$

calcoli già fatti

$$= \bar R \cdot \delta O + \bar\Omega_O^{\bullet} \cdot \bar\omega \delta t - \frac{d}{dt}\vec Q \cdot \delta O - \frac{d}{dt} \bar K_O \cdot \omega \delta t$$

se O fix

$\bar v_O \parallel \bar v_G$

$O \equiv G$

$$= (\bar R^e + \overset{=\bar 0}{\bar R^i}) \cdot \delta O + (\bar\Omega_O^e + \overset{=\bar 0}{\bar\Omega_O^i}) \cdot \bar\omega \delta t$$

$$- \frac{d}{dt}\bar Q \cdot \delta O - \frac{d}{dt} \bar K_O \cdot \bar\omega \delta t$$

$$= \left(\bar R^e - \frac{d}{dt}\bar Q\right) \cdot \delta O + \left(\bar\Omega_O^e - \frac{d}{dt} \bar K_O\right) \cdot \bar\omega \delta t \leq 0$$

in base a $(\bullet)$

quindi $\sum_{s=1}^{N} (\bar F_s - m_s \bar a_s) \cdot \delta P_s \leq 0 \quad \forall \delta P_s$ che è il P di D'A.

Quindi la validità delle equazioni cardinali assieme al principio delle reazioni vincolari comporta la verifica della relazione simbolica della dinamica e ciò assicura la sufficienza delle eq cardinali per lo studio del moto di un corpo rigido.

Se il sistema materiale è a vincoli fissi e x_e è una configurazione di equilibrio per il sistema allora la funzione

$$x(t) = x_e \quad \forall t \geq 0$$

è un moto possibile (la quiete) che deve verificare il Principio di D'Alembert, cioè:

$$\boxed{\delta L^a = \sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s (x_e, 0, t) \cdot \delta P_s \leq 0 \, , \forall \delta P_s} \qquad (4)$$

risulta una condizione necessaria per l'equilibrio.
La relazione (4) è detta RELAZIONE SIMBOLICA DELLA STATICA.
Se gli spostamenti virtuali sono invertibili allora la (4) è chiamata equazione simbolica della statica.
La relazione (4) risulta anche una condizione sufficiente affinchè una configurazione x_e sia di equilibrio per un sistema materiale a vincoli fissi.

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

C.N.S. affinchè una configurazione x_e sia di equilibrio per un sistema materiale a vincoli fissi è che il lavoro virtuale delle forze attive, calcolato in corrispondenza della configurazione x_e, con atto di moto nullo e per ogni $t \geq 0$, sia minore o uguale a zero per ogni spostamento virtuale, cioè valga (4).

(N.B.: quando i vincoli sono fissi $\delta P_s = dP_s$)

EQUILIBRIO DI UN SISTEMA MATERIALE OLONOMO

Se il sistema materiale è olonomo con n gradi di libertà allora:

$$P_s = \hat{P}_s(q_1, \dots, q_n, t)$$

$$dP_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial P_s}{\partial t} dt$$

$$\delta P_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \delta q_i \qquad \delta q_i = \dot{q}_i' \delta t$$

Il lavoro virtuale di una sollecitazione attiva $\{\bar{F}_s\}$ è:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s \cdot \delta P_s = \sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

Le quantità $\boxed{Q_i = \sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i}}$

sono chiamate FORZE GENERALIZZATE DI LAGRANGE oppure COMPONENTI LAGRANGIANE.

$$\delta L^{(a)} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$$

- se la coordinata lagrangiana q_k ha la dimensione di una lunghezza, allora Q_k ha la dimensione di una forza, se q_k è un angolo allora Q_k ha la dimensione di un momento di una forza.

- Se il sistema mat. olonomo è a vincoli <u>bilaterali</u> e fissi allora per il PLV per ogni posizione di equilibrio $q_e = (q_1^e, \dots, q_m^e)$ risulta:

$$\underline{\delta L^{(a)} = \sum_{i=1}^{m} Q_i(q_e, 0, t)\, \delta q_i = 0, \quad \forall \delta q_i} \qquad (5)$$

poichè i q_i sono indipendenti la scelta dei δq_i è arbitraria e questo implica

$$\boxed{Q_i(q_e, 0, t) = 0 \qquad i = 1, \dots, m} \qquad (6)$$

<u>TEOREMA</u>: C.N.S. affinchè una posizione q_e sia di equilibrio per un sistema olonomo a vincoli fissi e bilaterali è che siano nulle le forze di Lagrange (6) in corrispondenza della posizione q_e con atto di moto nullo.

Le equazioni (6) sono dette EQUAZIONI DI LAGRANGE DELLA STATICA.

- Se il sistema mat. olonomo è a vincoli fissi <u>unilaterali</u>

$$q = (\underbrace{q_1, \dots, q_k}_{\text{non limitati}}, \underbrace{q_{k+1}, \dots, q_m}_{\text{limitati}})$$

Supponiamo che il sistema si muova assumendo una configurazione di confine.
Al confine, per la presenza di vincoli unilaterali i gradi di libertà sono in numero $< m$, per esempio $k < m$ quindi $q_{k+1}, \dots, q_m$ assumono il valore limite e $\delta q_{k+1} = \dots = \delta q_m = 0$, mentre $q_1, \dots, q_k$ sono indipendenti e quindi $\delta q_1, \dots \delta q_k$ arbitrari.

Quindi per ogni q_e di confine e di equilibrio

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i(q_e, 0, t)\, \delta q_i = 0 \quad , \forall \delta q_i \quad i=1, \dots, k$$

da cui

$$\boxed{Q_i(q_e, 0, t) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k} \qquad (7)$$

A partire da q_e di confine eseguo uno spostamento virtuale non invertibile che porta il sistema in una posizione interna e per il P.L.V:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{i=1}^{n} Q_i(q_e, 0, t)\, \delta q_i \leq 0 \quad \forall \delta q_i \text{ non inv.}$$

ma grazie a (7) diventa

$$\boxed{\sum_{i=k+1}^{n} Q_i(q_e, 0, t)\, \delta q_i \leq 0 \quad \forall \delta q_i \quad i = k+1, \dots, n \quad \text{col segno dovuto}} \qquad (8)$$

C.N.S. affinché una posizione di confine sia di equilibrio q_e per un sistema olonomo a vincoli fissi e unilaterali è che le Q_i corrispondenti ai parametri che caratterizzano il confine siano nulle cioè valga (7), mentre per le restanti forze generalizzate di Lagrange valga (8) in corrispondenza a spostamenti virtuali non invertibili.

Le posizioni di equilibrio interne sono dette ORDINARIE.

Se il sist. olonomo a vincoli fissi è soggetto a soli vincoli bilaterali (tutti i δq_i sono invertibili) le posizioni di equilibrio q_e sono tutte ordinarie.

• Se il sist. olonomo è soggetto a forze attive conservative

$$dL^{(a)} = dU$$

dove $U = U(q_1, \dots, q_n)$ per cui:

$$dU = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i$$

ma vale

$$dL^{(a)} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, dq_i$$

quindi

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

• Per sist. olonomi a vincoli fissi, soggetti a forze conservative

$\{\delta q_i\} = \{dq_i\}$ $dU = \delta U$ e la condizione di equilibrio è:

$$\boxed{dL^{(a)} = \delta L^{(a)} = \delta U \leq 0}$$

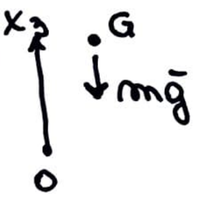
se i vincoli sono anche bilaterali allora:

$$\boxed{\delta U = 0}$$

→ le posizioni di equilibrio ordinarie sono quelle che rendono stazionario il potenziale e quindi

$$\boxed{Q_i(q_e, 0, t) = \frac{\partial U}{\partial q_i}(q_e) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n} \qquad (9)$$

Nel caso che le forze attive siano solo le forze peso:



$$U = -mg \, x_3(G)$$

$$\delta U = -mg \, \delta x_3(G) \leq 0$$

(teorema di Torricelli)

EQUAZIONI DI LAGRANGE

Per un sistema olonomo a vincoli bilaterali con n gradi di libertà e parametri lagrangiani $q_1, \dots, q_n$ riscriviamo l'equazione simbolica della dinamica:

$$0 = \delta L^{(P)} = \sum_{s=1}^{N} (\bar{F}_s - m_s \dot{\bar{v}}_s) \cdot \delta P_s = \sum_{s=1}^{N} (\bar{F}_s - m_s \dot{\bar{v}}_s) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big[\underbrace{\sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i}}_{= Q_i} - \underbrace{\sum_{s=1}^{N} m_s \dot{\bar{v}}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i}}_{= \tau_i} \Big] \delta q_i$$

COMPONENTI GENER. FORZE D' INERZIA

$$= \sum_{i=1}^{n} (Q_i - \tau_i) \delta q_i \quad , \forall \delta q_i$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_i = \tau_i \qquad i = 1, \dots, n}$$

EQUAZIONI DI LAGRANGE I° TIPO (10)

Ricordando la regola della derivata di un prodotto di funzioni $(fg)' = f'g + fg'$ analizziamo il termine τ_i:

$$\tau_i = \sum_{s=1}^{N} m_s \dot{\bar{v}}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i} = \sum_{s=1}^{N} m_s \frac{d}{dt} \left[\bar{v}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \right] - \sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_s \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P_s}{\partial q_i} \right)$$

ma $\bar{v}_s = \frac{d}{dt} P_s(q_1, \dots, q_n, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial P_s}{\partial t}$

da cui

$$\boxed{\frac{\partial \bar{v}_s}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial P_s}{\partial q_i}}$$

e

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial q_J} \bar{v}_s = \frac{\partial}{\partial q_J} \left(\frac{d}{dt} P_s \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P_s}{\partial q_J} \right)}$$

Perciò:

$$\tau_i = \sum_{s=1}^{N} m_s \frac{d}{dt}\left[\bar{v}_s \cdot \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial \dot{q}_i}\right] - \sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_s \cdot \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial q_i}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_s \cdot \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial \dot{q}_i}\right] - \sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_s \cdot \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial q_i}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \bar{v}_s^2\right] - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s \frac{\partial}{\partial q_i} \bar{v}_s^2$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_s^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s \bar{v}_s^2\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} T\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

dove $T = T(q, \dot{q}, t)$ è l'energia cinetica del sist. olonomo.

Dalla (10) otteniamo:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1, .., n} \tag{11}$$

dette **EQUAZIONI DI LAGRANGE DEL II TIPO**.

- Se il sistema olonomo è soggetto a forze conservative oltre che a vincoli bilaterali abbiamo visto che:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad i = 1, .., n$$

Indichiamo con

$$\boxed{\mathcal{L} = T + U}$$

una nuova funzione chiamata **LAGRANGIANA**; risulta:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) + U(q)$$

Osserviamo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0 \text{ perchè } U \text{ non dipende da } \dot{q}_i \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i$$

allora le equazioni di Lagrange assumono la forma

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, m} \tag{12}$$

- Ogni sistema meccanico per cui è possibile costruire la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ è detto lagrangiano.

<u>Def.</u>: Per un sistema lagrangiano chiamiamo momenti cinetici o variabili coniugate le grandezze

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad i = 1, \dots, m$$

Se esiste un parametro q_k : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$ allora si ha:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0$$

e quindi

(13) $\boxed{p_k = \text{costante}}$ INTEGRALE PRIMO DI MOTO PER SIST. LAGRANGIANI

e la coordinata q_k è detta ciclica o ignorata.

- se q_k è una lunghezza, p_k rappresenta la conservazione della quantità di moto
- se q_k è un angolo, p_k rappresenta la conservazione del momento della quantità di moto
- la funzione lagrangiana $\mathcal{L}$ è invariante al variare dell'osservatore.

ENERGIA CINETICA PER UN SISTEMA OLONOMO

Riprendiamo l'espressione dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s v_s^2$$

e ricordiamo che per un sistema olonomo

$$\bar{v}_s = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial P_s}{\partial t}$$

Allora

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial P_s}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_{J=1}^{m} \frac{\partial P_s}{\partial q_J} \dot{q}_J + \frac{\partial P_s}{\partial t} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \left(\sum_{i,J=1}^{m} \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_J} \dot{q}_i \dot{q}_J + \frac{\partial P_s}{\partial t} \cdot \frac{\partial P_s}{\partial t} + 2 \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P_s}{\partial t} \dot{q}_i \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,J=1}^{m} \Big(\underbrace{\sum_{s=1}^{N} m_s \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_J}}_{= a_{iJ}} \Big) \dot{q}_i \dot{q}_J +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \Big(\underbrace{2 \sum_{s=1}^{N} m_s \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P_s}{\partial t}}_{= a_i} \Big) \dot{q}_i +$$

$$\frac{1}{2} \underbrace{\sum_{s=1}^{N} m_s \frac{\partial P_s}{\partial t} \cdot \frac{\partial P_s}{\partial t}}_{= a_0}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{i,J=1}^{m} a_{iJ} \dot{q}_J \dot{q}_i + 2 \sum_{i=1}^{m} a_i \dot{q}_i + a_0 \right]$$

dove a_{iJ}, a_i, a_0 sono funzioni di $(q_1, \dots, q_m, t)$.

$$= T_2 + T_1 + T_0$$

cioè l'energia cinetica risulta la somma di una forma quadratica nelle $\dot{q}$ cioè T_2, di una forma lineare nelle $\dot{q}$ cioè T_1, di un termine indipendente dalle $\dot{q}$ cioè T_0.

- Se i vincoli sono fissi $\Rightarrow \frac{\partial P_s}{\partial t} \equiv 0$ e

$$T = T_2$$

e si ha $T_2 = 0$ sse $\dot{q}_i = 0 \ \forall i = 1, .., n$.

Quindi $T_2 > 0$ è una forma quadratica definita positiva e la matrice dei coefficienti $\{a_{ij}\}$ $\underset{\sim}{A}$ ha $\det \underset{\sim}{A} \neq 0$ quindi $\underset{\sim}{A}$ è invertibile, cioè $\exists \underset{\sim}{A}^{-1}$.

Ritorniamo a $T = T_2 + T_1 + T_0$.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_j + a_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ddot{q}_j + \text{termini } \text{~~inferiori~~ di } \text{~~grado~~ } \text{ordine inferiore al } 2^\circ.$$

$\frac{\partial T}{\partial q_i}$ contiene termini di ~~grado~~ ordine inferiore al 2°.

Perciò dalle equazioni di Lagrange si ha:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ddot{q}_j = R_i(q, \dot{q}, t) \quad i = 1, .., n \qquad \underset{\sim}{A} \ddot{\vec{q}} = \vec{R}$$

essendo $\underset{\sim}{A}$ invertibile

$$\ddot{q}_i = P_i(q, \dot{q}, t) \quad i = 1, .., n \qquad \ddot{\vec{q}} = \underset{\sim}{A}^{-1} \vec{R} = \vec{P}$$

otteniamo un sistema di n equazioni differenziali del 2° ordine scritto in forma normale la cui soluzione è unica (moto) in base al th. di Cauchy se sono note le c.i. $q_i(0) = q_i^0$ e $\frac{d}{dt} q_i(0) = \dot{q}_i^0$, $i = 1, .., n$