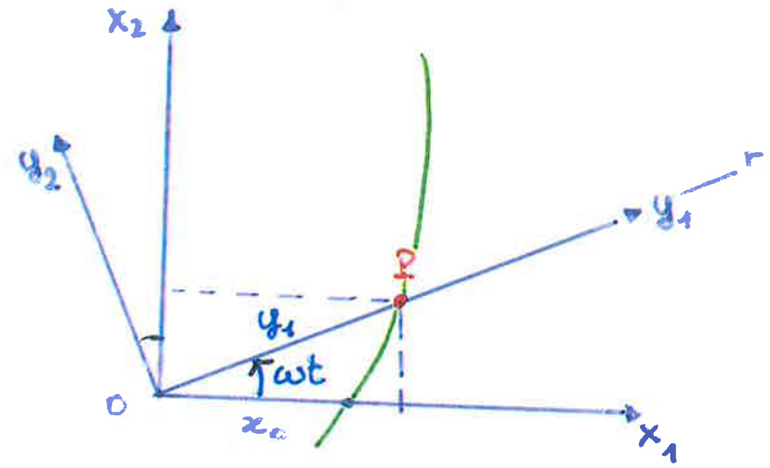
6) Applicazioni dei teoremi di composizione delle velocità accelerazioni e velocità angolari

Es. 1: Moto uniforme di un punto P su una retta, passante per l'origine di un rif. cart. Ox_1x_2, uniformemente rotante nel piano Ox_1x_2.



Ox_1x_2 rif. fisso

Oy_1y_2 rif. solidale con r

- Su r P si muove con velocità costante v
- La retta r ruota con vel. ang. $\bar{\omega} = \dot{\theta}\,\bar{i}_3$ costante. $\theta = \omega t$ $\quad (\theta = 0$ per $t = 0)$

Per il th. di composizione delle velocità:

$$\bar{v}_a(P) = \bar{v}_r(P) + \bar{v}_\tau(P)$$

$$\bar{v}_a(P) = \dot{x}_1\,\bar{i}_1 + \dot{x}_2\,\bar{i}_2$$

$$\bar{v}_r(P) = v\,\bar{J}_1 = v\,(\cos\omega t\,\bar{i}_1 + \operatorname{sen}\omega t\,\bar{i}_2)$$

$$P - O = y_1\,\bar{J}_1 = (vt + x_0)(\cos\omega t\,\bar{i}_1 + \operatorname{sen}\omega t\,\bar{i}_2)$$

$$\bar{v}_\tau(P) = \bar{\omega} \times (P-O) = \omega\,\bar{i}_3 \times y_1\,\bar{J}_1 = \omega\, y_1\,\bar{J}_2$$

$$= \omega\,(vt + x_0)\,(-\operatorname{sen}\omega t\,\bar{i}_1 + \cos\omega t\,\bar{i}_2)$$

Uguagliando le componenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v\cos\omega t - \omega\,(vt + x_0)\operatorname{sen}\omega t = \dfrac{d}{dt}\left[(vt + x_0)\cos\omega t\right] \\ \dot{x}_2 = v\operatorname{sen}\omega t + \omega\,(vt + x_0)\cos\omega t = \dfrac{d}{dt}\left[(vt + x_0)\operatorname{sen}\omega t\right] \end{cases}$$

$$\boxed{\bar{v}_a = v\,\vec{r} + \omega\rho\,\vec{h}}$$

Integrando e ricordando che per $t=0$ $\theta=0$ e quindi $P-O = x_0 \bar{\imath}_1$ si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 - \cancel{x_0} = (vt + x_0)\cos\omega t - \cancel{x_0} \\ x_2 = (vt + x_0)\operatorname{sen}\omega t \end{cases}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \cot g\,\omega t \quad , \quad \theta = \omega t = \operatorname{arccotg}\left(\frac{x_1}{x_2}\right).$$

Se riferiamo il moto in coordinate polari (ρ, θ) si ha che $\begin{cases} y_1 = \rho \\ \theta = \omega t \end{cases}$ $\begin{cases} \bar{J}_1 = \bar{r} \\ \bar{J}_2 = \bar{h} \end{cases}$ versori degli assi del rif. Oy_1y_2.

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = vt + x_0 = \frac{v}{\omega}\theta + x_0 = \alpha\theta + \rho_0$$

$\boxed{\rho = \alpha\theta + \rho_0}$ Spirale di Archimede.

Dal th. di composizione delle accelerazioni:

$$\bar{a}_a(P) = \bar{a}_r(P) + \bar{a}_\tau(P) + \bar{a}_c(P)$$

Su r la velocità di P è costante $\bar{v}_r = v\bar{J}_1 = \text{cost}$

$$\Rightarrow \bar{a}_r \equiv \bar{0}$$

$\bar{a}_\tau = -\omega^2(P-O)$ acc. di P pensato rigidamente collegato con la retta r.

$= -\omega^2\rho\bar{r}$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2\omega\bar{\imath}_3 \times v\bar{J}_1 = 2\omega\bar{\imath}_3 \times v\bar{r} = 2\omega v\bar{h}$$

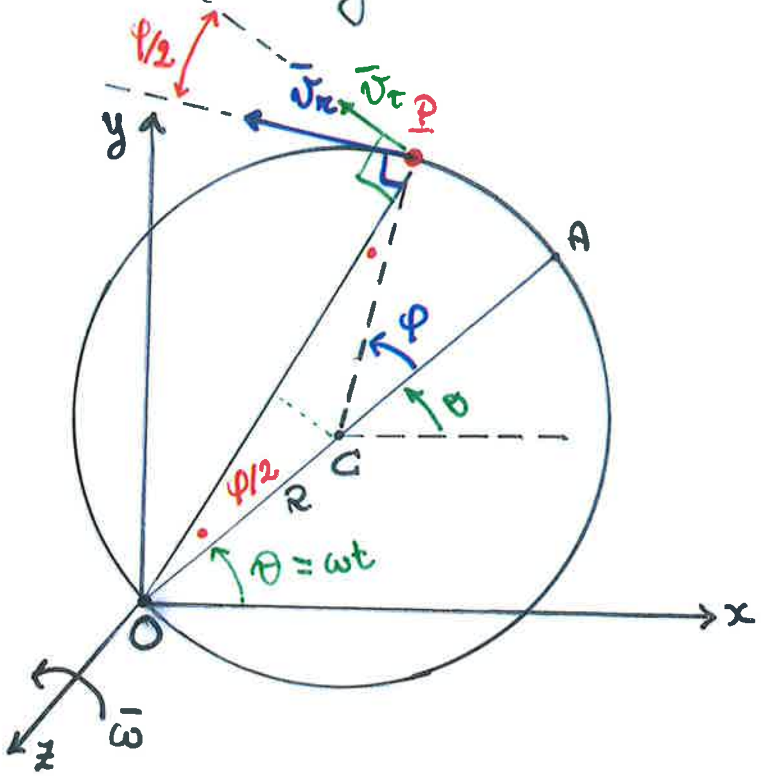
$$\boxed{\bar{a}_a = -\omega^2\rho\bar{r} + 2\omega v\bar{h}}$$

$= -\omega^2(vt + x_0)(\cos\omega t\,\bar{\imath}_1 + \operatorname{sen}\omega t\,\bar{\imath}_2) + 2\omega v(-\operatorname{sen}\omega t\,\bar{\imath}_1 + \cos\omega t\,\bar{\imath}_2)$

$= [-\omega^2(vt + x_0)\cos\omega t - 2\omega v\operatorname{sen}\omega t]\,\bar{\imath}_1 + [-\omega^2(vt + x_0)\operatorname{sen}\omega t + 2\omega v\cos\omega t]\,\bar{\imath}_2$

Esercizi di CINEMATICA RELATIVA

1) Calcolare la velocità di un punto P mobile su una circonferenza uniformemente rotante nel proprio piano attorno ad un suo punto fisso O, con velocità angolare $\bar{\omega}$ costante.



$\omega =$ costante

$\Downarrow$

$\theta(t) = \omega t + \theta_0$

scelta : $t = 0 \quad \theta_0 = 0$

coord. di P:

$$\begin{cases} x = R\cos\theta + R\cos(\theta+\varphi) \\ y = R\sin\theta + R\sin(\theta+\varphi) \end{cases}$$

- metodo cartesiano

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\sin\theta\,\dot{\theta} - R\sin(\theta+\varphi)(\dot{\theta}+\dot{\varphi}) \\ \dot{y} = R\cos\theta\,\dot{\theta} + R\cos(\theta+\varphi)(\dot{\theta}+\dot{\varphi}) \end{cases} \qquad \dot{\theta} = \omega$$

$$v_P^2 = R^2\left[\omega^2 + (\omega+\dot{\varphi})^2 + 2\cos\varphi\,\omega(\omega+\dot{\varphi})\right]$$

- th. di composizione delle velocità

$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_\tau$

$\bar{v}_r = R\dot{\varphi}\,\vec{t} \qquad \vec{t}$: vers. tangente alla circ.

$\bar{v}_\tau = \overline{OP}\,\dot{\theta}\,\vec{h} \qquad \vec{h}$: vers. $\perp$ ad $\overline{OP}$

$\quad\; = \bar{\omega} \times (P-O)$

$$\overline{OP} = 2R\cos\varphi/2$$

$$\bar{v}_a^2 = (\bar{v}_r + \bar{v}_\tau)\cdot(\bar{v}_r + \bar{v}_\tau) = v_r^2 + v_\tau^2 + 2v_r v_\tau \cos(\bar{v}_r, \bar{v}_\tau)$$

$$\cos(\bar{v}_r, \bar{v}_\tau) = \cos(\bar{t}, \bar{h}) = \cos\varphi/2$$

$$\Rightarrow \bar{v}_a^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + 4R^2\omega^2\cos^2\varphi/2 + 4R^2\cos^2\varphi/2\,\omega\dot{\varphi}$$

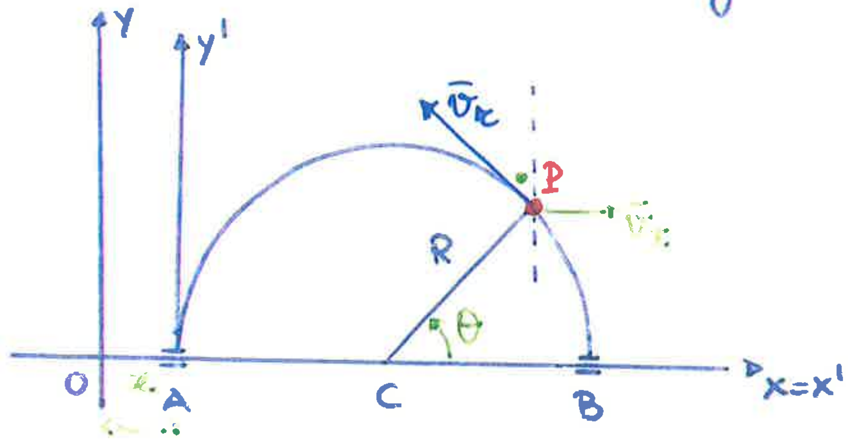
$$\cos^2\varphi/2 = \frac{1+\cos\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow v_a^2 = R^2\left[\dot{\varphi}^2 + 2(1+\cos\varphi)\omega^2 + 2(1+\cos\varphi)\omega\dot{\varphi}\right]$$

$$= R^2\left[\omega^2 + (\omega+\dot{\varphi})^2 + 2\cos\varphi\,\omega\,(\omega+\dot{\varphi})\right]$$

■

2) Calcolare la velocità e l'accelerazione di un punto P mobile su una semicirconferenza che trasla con velocità costante su una guida orizzontale.



Tutti i punti della semicirconferenza hanno la stessa velocità $\bar{v}$.

$\bar{v} = v\,\bar{i}$

$\dot{x}_A = v \qquad \ddot{x}_A = 0$

$x_A = vt \quad (t=0 \quad A=0)$

- metodo cartesiano:

$$\begin{cases} x_P = x_A + R + R\cos\theta = vt + R + R\cos\theta \\ y_P = R\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_P = v - R\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_P = R\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

$$v_P^2 = v^2 + R^2\dot\theta^2 - 2Rv\,\mathrm{sen}\theta\,\dot\theta$$

$$\begin{cases} \ddot x_P = -R\cos\theta\,\dot\theta^2 - R\,\mathrm{sen}\theta\,\ddot\theta \\ \ddot y_P = -R\,\mathrm{sen}\theta\,\dot\theta^2 + R\cos\theta\,\ddot\theta \end{cases}$$

$$a_P^2 = R^2\dot\theta^4 + R^2\ddot\theta^2 = R^2(\dot\theta^4 + \ddot\theta^2)$$

- con il teorema di composizione delle velocità e delle accelerazioni.

$$\Rightarrow \bar v_a = \bar v_r + \bar v_\tau$$

$$\bar v_r = R\dot\theta\,\bar t \qquad\qquad \cos(\pi/2 + \theta)$$

$$\bar v_\tau = v\,\bar i \qquad v_a^2 = v^2 + R^2\dot\theta^2 + 2Rv\dot\theta\cos(\bar t, \bar i)$$

$$= v^2 + R^2\dot\theta^2 - 2Rv\,\mathrm{sen}\theta\,\dot\theta$$

$$\Rightarrow \bar a_a = \bar a_r + \bar a_\tau + \bar a_c$$

Poichè la semicirconferenza trasla $\bar\omega \equiv \bar 0$, allora:

$$\bar a_c = 2\bar\omega \times \bar v_r \equiv \bar 0$$

Poichè la semicirconferenza trasla con vel. costante $\bar v$.

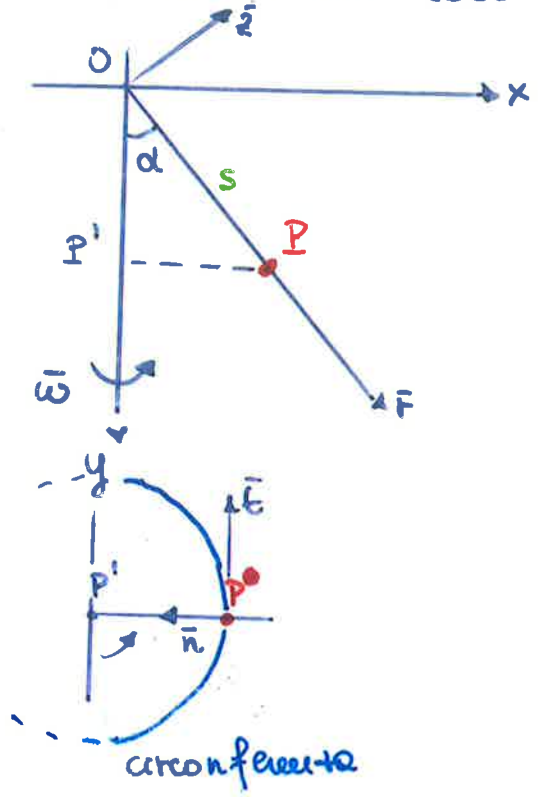
$$\bar v_\tau = \mathrm{cost} \Rightarrow \bar a_\tau \equiv \bar 0$$

quindi: $\underline{\bar a_a = \bar a_r}$ cioè i due riferimenti Oxy e $Ax'y'$ appartengono alla stessa classe di equivalenza galileiana

$$\bar a_r = \ddot s\,\bar t + \frac{\dot s^2}{\rho}\bar n = R\ddot\theta\,\bar t + \frac{R^2\dot\theta^2}{R}\bar n \qquad s = R\theta$$

$$a^2 = R^2(\ddot\theta^2 + \dot\theta^4)$$

3) Calcolare la velocità e l'accelerazione di un punto P mobile su una guida inclinata di un angolo α costante rispetto alla verticale che ruota uniformemente attorno a tale asse.



Col th. di comp. delle velocità:

$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_\tau$

$\bar{v}_r = \dot{s}\,\bar{r}$

$\bar{v}_\tau = \overline{PP'}\omega\,\vec{t} = \omega s \operatorname{sen}\alpha\,\vec{t}$

$\bar{F} \perp \vec{t}$

$v_a^2 = \dot{s}^2 + \omega^2 s^2 \operatorname{sen}^2\alpha$

Col th. di comp. delle accelerazioni

$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_\tau + \bar{a}_c$

$\bar{a}_r = \ddot{s}\,\bar{r}$

$\bar{a}_\tau = -\omega^2(P-P') = \omega^2 s \operatorname{sen}\alpha\,\bar{n}$ acc. centripeta.

$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r = 2(-\omega\,\bar{j})\times\dot{s}\,\bar{r} = +2\omega\dot{s}\operatorname{sen}\alpha\,\vec{t}$

(~~[illegible]~~)

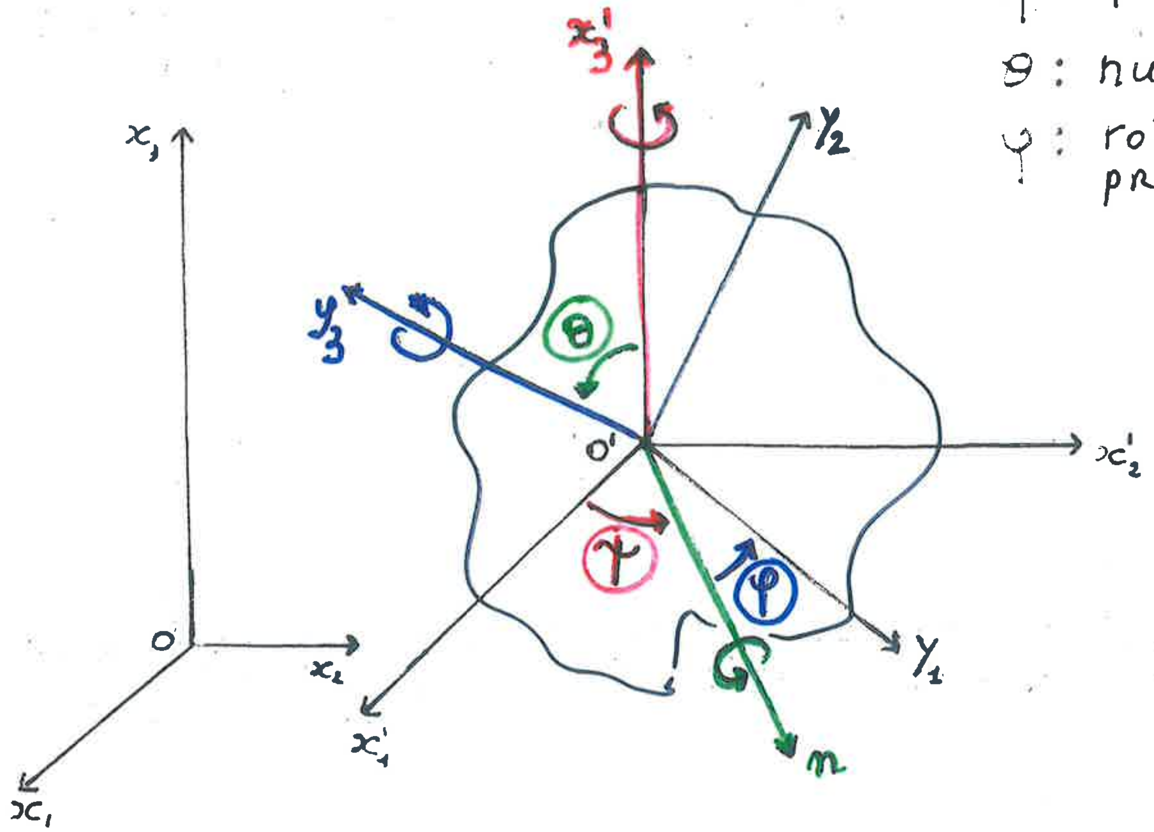
$\bar{a}_a = \ddot{s}\,\bar{r} + \omega^2 s \operatorname{sen}\alpha\,\bar{n} + 2\omega\dot{s}\operatorname{sen}\alpha\,\bar{t}$ ∎

ANGOLI di EULERO

ψ : precessione

θ : nutazione

φ : rotazione propria



(O, x_1, x_2, x_3) TERNA FISSA

(O', x_1', x_2', x_3') TERNA con ASSI // A quelli della TERNA FISSA

(O', y_1, y_2, y_3) TERNA solidale con il corpo rigido

n linea dei nodi : INTERSEZIONE del piano (O', x_1', x_2') con il piano (O', y_1, y_2)

n è ORIENTATA in modo TALE che x_3', y_3, n FORMINO UNA TERNA DESTRA (CENTRATA in O')

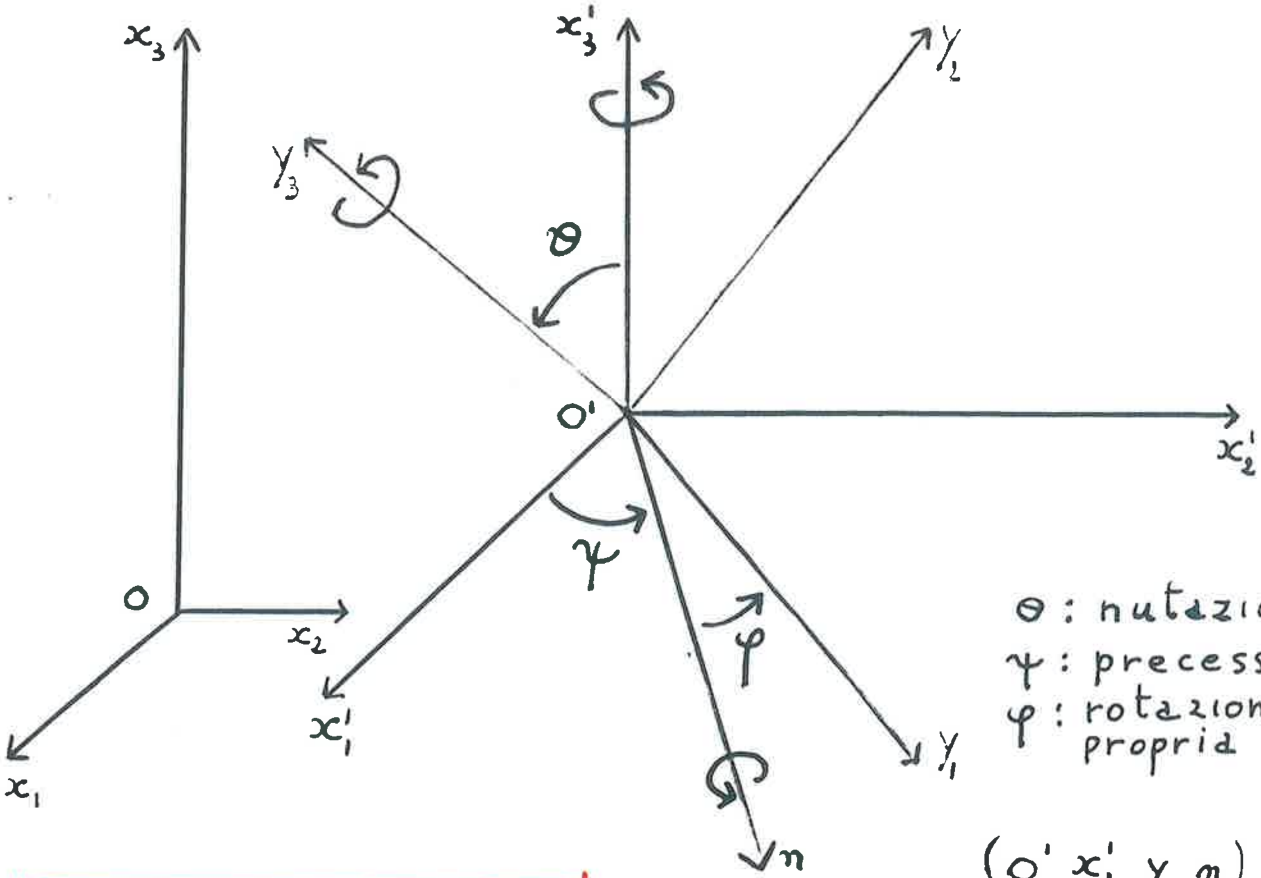
GLI ANGOLI di EULERO sono ORIENTATI secondo la regola della VITE DESTRORSA, CIASCUN ANGOLO rispetto al suo ASSE di ROTAZIONE

$\psi \longrightarrow$ ROTAZIONE ATTORNO a x_3'

$\varphi \longrightarrow$ ROTAZIONE ATTORNO a y_3

$\theta \longrightarrow$ ROTAZIONE ATTORNO a n

Espressione della velocità angolare $\vec{\omega}$ in funzione degli angoli di Eulero



θ : nutazione
ψ : precessione
φ : rotazione propria

(O', x_3', y_3, n) terna destra

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{j}_3 + \dot{\theta}\,\vec{n} + \dot{\psi}\,\vec{i}_3}$$

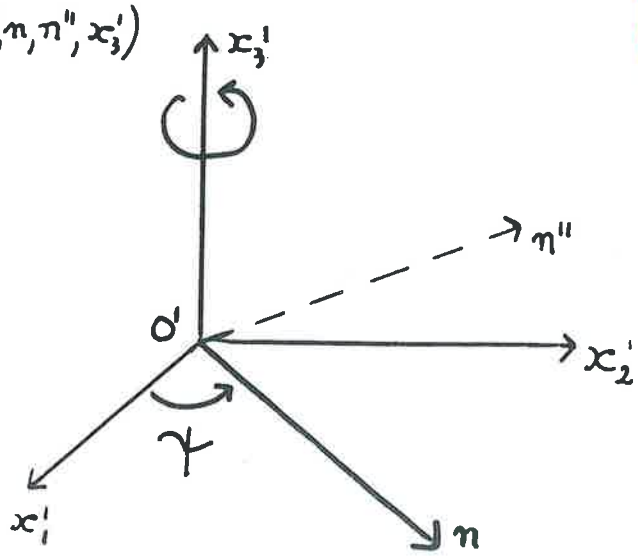
1ª fase

ruotiamo (O', x_1', x_2', x_3') intorno a x_3' di un angolo ψ in modo tale da portare x_1' coincidente con n

$(O', x_1', x_2', x_3') \longrightarrow (O', n, n'', x_3')$

$\vec{n}'' = \vec{i}_3 \times \vec{n}$

$$\boxed{\vec{\omega}_1 = \dot{\psi}\,\vec{i}_3}$$



$$T_1 = \begin{vmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

matrice di trasformazione tra le due basi

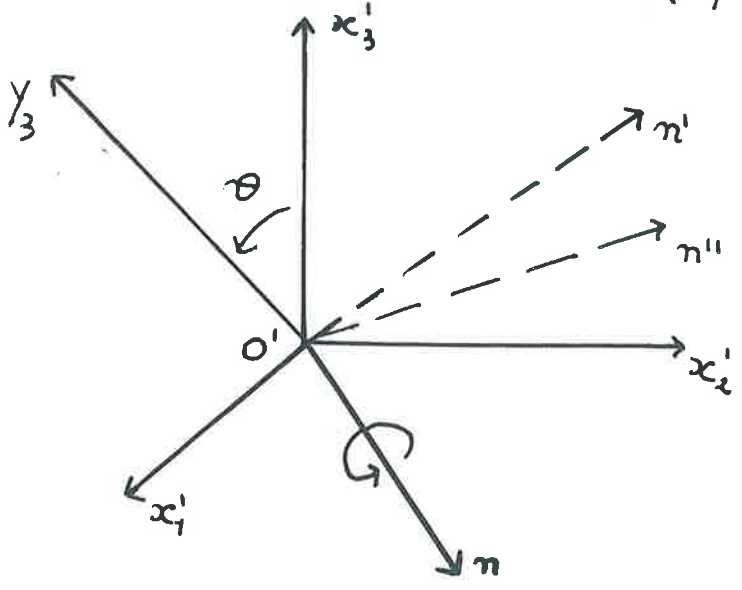
$$\begin{vmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{i}_2 \\ \vec{i}_3 \end{vmatrix} = T_1 \begin{vmatrix} \vec{n} \\ \vec{n}'' \\ \vec{i}_3 \end{vmatrix}$$

2ª fase

ruotiamo (O', n, n'', x'_3) intorno a n di un angolo θ in modo da portare x'_3 a coincidere con y_3

$\vec{n}' = \vec{J}_3 \times \vec{n}$

$(O', n, n'', x'_3) \longrightarrow (O', n, n', y_3)$



$$\boxed{\vec{\omega}_2 = \dot{\theta}\,\vec{n}}$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

matrice di trasformazione

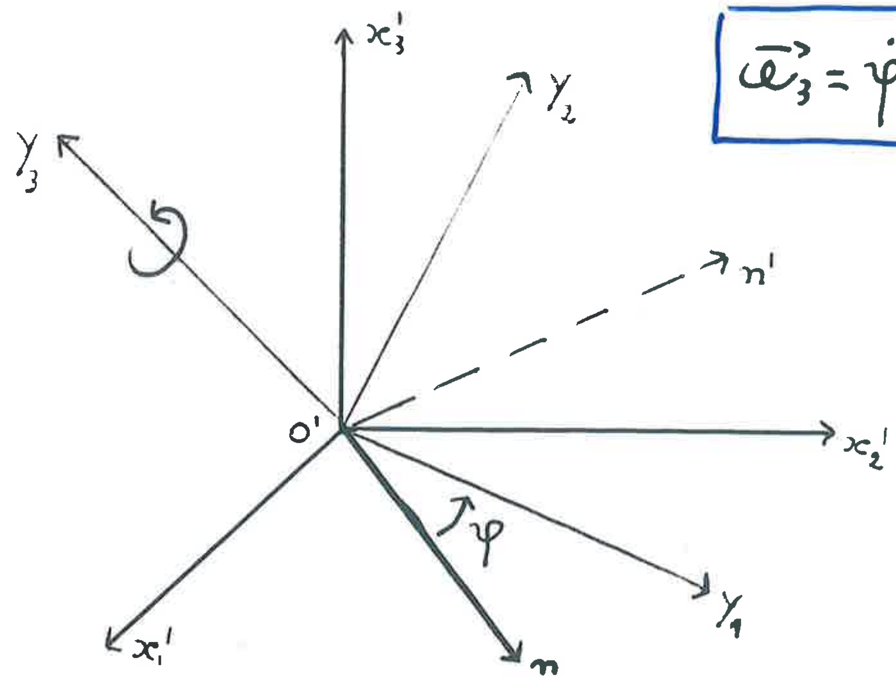
$$\begin{vmatrix} \vec{n} \\ \vec{n}'' \\ \vec{i}_3 \end{vmatrix} = T_2 \begin{vmatrix} \vec{n} \\ \vec{n}' \\ \vec{\gamma}_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{n} = \vec{n} \\ \vec{n}'' = \cos\theta\,\vec{n}' - \sin\theta\,\vec{\gamma}_3 \\ \underline{\vec{i}_3 = \sin\theta\,\vec{n}' + \cos\theta\,\vec{\gamma}_3} \end{cases} \quad 1)$$

3ª Fase

ruotiamo (O', n, n', γ_3) intorno a γ_3 di un angolo φ in modo da portare n a coincidere con γ_1

$$\boxed{\vec{\omega}_3 = \dot{\varphi}\,\vec{\gamma}_3}$$



$$T_3 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

matrice di trasformazione

$$\begin{vmatrix} \vec{n} \\ \vec{n}' \\ \vec{\gamma}_3 \end{vmatrix} = T_3 \begin{vmatrix} \vec{\gamma}_1 \\ \vec{\gamma}_2 \\ \vec{\gamma}_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{n} = \cos\varphi\,\vec{\gamma}_1 - \sin\varphi\,\vec{\gamma}_2 \\ \vec{n}' = \sin\varphi\,\vec{\gamma}_1 + \cos\varphi\,\vec{\gamma}_2 \\ \vec{\gamma}_3 = \vec{\gamma}_3 \end{cases} \quad 2)$$

Per il teorema di composizione delle velocità angolari per i corpi rigidi si ha

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$$

i.e.

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\vec{i}_3 + \dot{\theta}\,\vec{n} + \dot{\varphi}\,\vec{\gamma}_3}$$

ma per 1) e 2)

$$\vec{i}_3 = \sin\vartheta\,\vec{n}' + \cos\theta\,\vec{\gamma}_3$$
$$\vec{n} = \cos\varphi\,\vec{\gamma}_1 - \sin\varphi\,\vec{\gamma}_2$$
$$\vec{n}' = \sin\varphi\,\vec{\gamma}_1 + \cos\varphi\,\vec{\gamma}_2$$

quindi

$$\vec{\omega} = (\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi)\,\vec{\gamma}_1 + (\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi)\,\vec{\gamma}_2 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{\gamma}_3$$

i.e.

$$\left|\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \omega_2 &= \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta \end{aligned}\right.$$

EQUAZIONI CINEMATIche di EuleRO