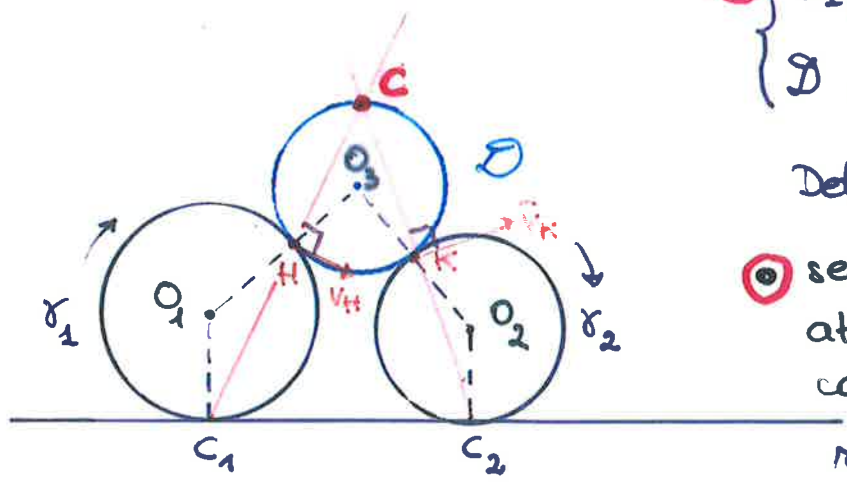
Teorema di Chasles

1)



(stessi raggi)

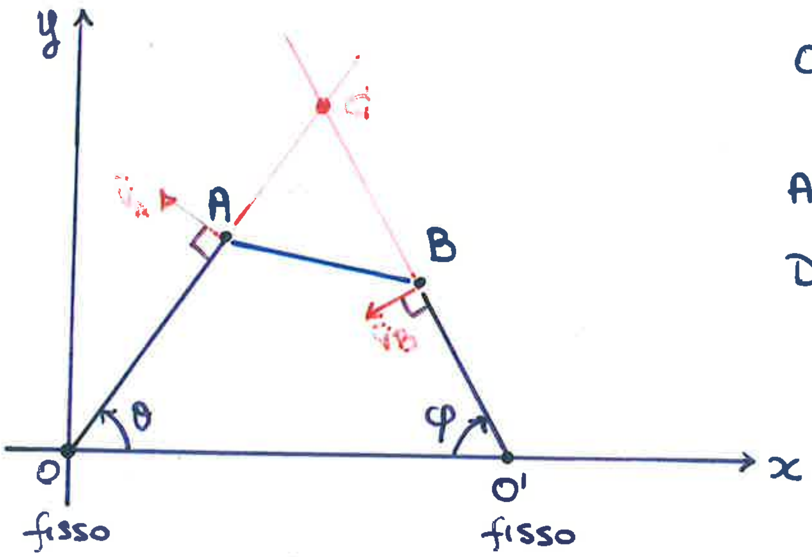
$\begin{cases} \gamma_1, \gamma_2 \text{ rot. s.s. su } r \\ \mathcal{D} \text{ r.s.s. su } \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \end{cases}$

Det. il C.I.R. di $\mathcal{D}$

se γ_1 e γ_2 ruotano attorno ad O_1 e O_2 con uguali v. angolari
r (stessi raggi)
e $\mathcal{D}$ r.s.s. su γ_1 γ_2

$\boxed{C \equiv O_3}$.

2)

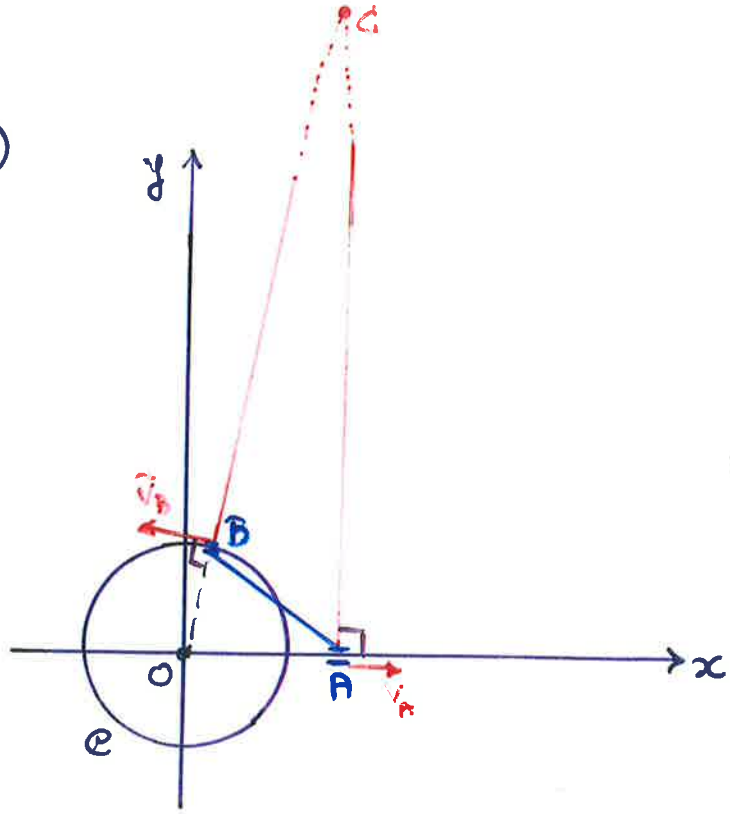


OA, O'B mobili attorno ad O e O'

AB incernierata

Det. C.I.R. di AB.

3)

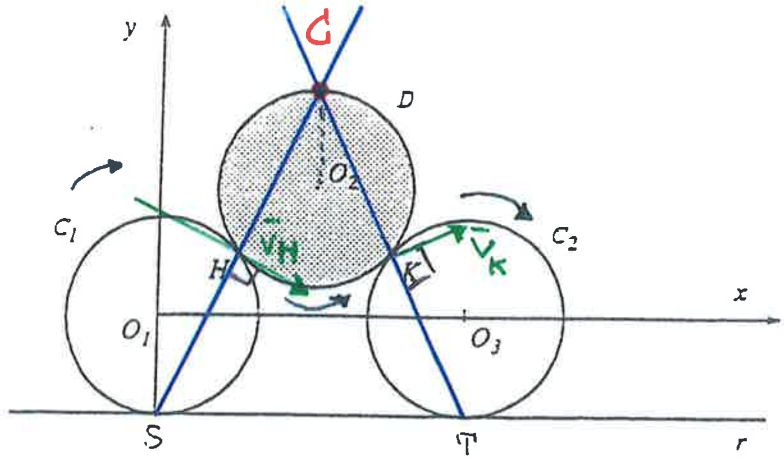


AB con A scorrevole su Ox
con B " su e

Det. C.I.R.

- analogo se OB è un'asta mobile attorno ad O e in B c'è una cerniera.

4. Nel cinematismo descritto in figura il disco $\mathcal{D}$ (raggio R e centro O_2) rotola senza strisciare sulle circonferenze C_1, C_2 (raggio R e centri O_1, O_3) che rotolano senza strisciare sulla retta fissa r. Detto C il centro di istantanea rotazione di $\mathcal{D}$, determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta.



A nessuna; B $x_C = x_{O_2}$; C $x_C = x_H$; D $y_C = y_{O_2}$.

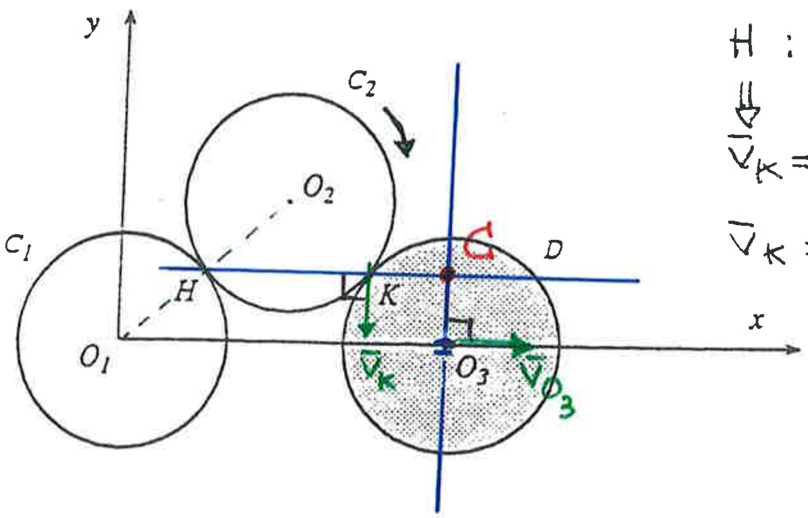
C = retta $SH \cap$ retta $TK \Rightarrow$ B

S : c.i.r. di $\mathcal{C}_1 \Rightarrow \bar{V}_H = \bar{\omega}_{C_1} \times (H-S)$, $\perp \overline{HS}$

T : c.i.r. di $\mathcal{C}_2 \Rightarrow \bar{V}_K = \bar{\omega}_{C_2} \times (K-T)$, $\perp \overline{KT}$

r.s.s. $\Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_H = \bar{V}_{H'} & \text{con } H' \in \mathcal{D} \\ \bar{V}_K = \bar{V}_{K'} & \text{con } K' \in \mathcal{D} \end{cases}$

4. Nel cinematismo descritto in figura la circonferenza C_2 (raggio R e centro O_2) rotola senza strisciare sulla circonferenza fissa C_1 (raggio R e centro O_1) e sul bordo del disco $\mathcal{D}$ (raggio R), il cui centro O_3 scorre su Ox. Detto C il centro di istantanea rotazione di $\mathcal{D}$, determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta.



H : c.i.r. di $\mathcal{C}_2$

$\Downarrow$

$\bar{V}_K = \bar{\omega}_{C_2} \times (K-H)$

$\bar{V}_K = \bar{V}_{K'}$ con $K' \in \mathcal{D}$

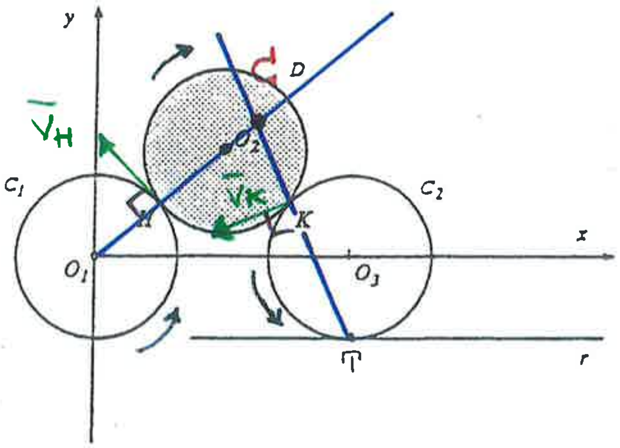
$\Uparrow$

r.s.s.

A $y_C = y_K$; B nessuna; C $x_C = x_K$; D $y_C = y_{O_2}$.

C = retta $HK \cap$ retta $O_3y \Rightarrow$ A

4. Nel cinematismo descritto in figura il disco $\mathcal{D}$ (raggio R e centro O_2) rotola senza strisciare sulla circonferenza C_1 (raggio R) che ruota attorno al suo centro O_1 e sulla circonferenza C_2 (raggio R e centro O_3) la quale rotola senza strisciare sulla retta fissa r. Detto C il centro di istantanea rotazione di $\mathcal{D}$, determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta.



A $y_C = y_K$; B $x_C = x_{O_2}$; C $x_C = x_H$; D nessuna.

C = retta $O_1 O_2 \cap$ retta $TK \Rightarrow$ D

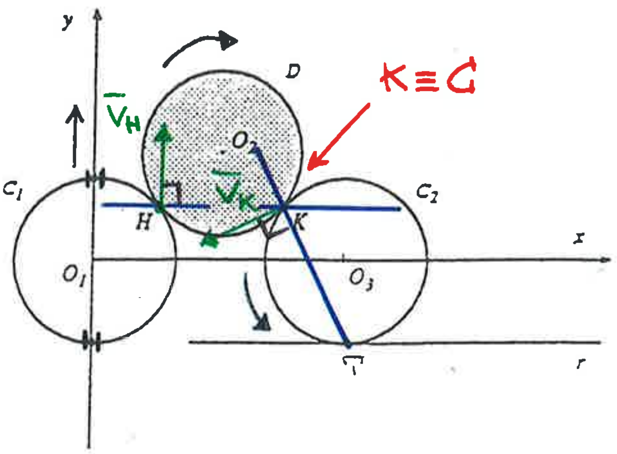
O_1 : c.i.r. di $\mathcal{C}_1$

T : c.i.r. di $\mathcal{C}_2$

r.s.s. $\Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_H = \bar{V}_{H'}, & H' \in \mathcal{D} \\ \bar{V}_K = \bar{V}_{K'}, & K' \in \mathcal{D} \end{cases}$

4. Nel cinematismo descritto in figura il disco $\mathcal{D}$ (raggio R e centro O_2) rotola senza strisciare sulle circonferenze C_1 (raggio R) il cui diametro AB scorre su Oy e sulla circonferenza C_2 (raggio R e centro O_3) la quale rotola senza strisciare sulla retta fissa r. Detto C il centro di istantanea rotazione di $\mathcal{D}$, determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

r.s.s. $\Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_K = \bar{V}_{K'} \text{ con } K' \in \mathcal{D} \\ \bar{V}_H = \bar{V}_{H'} \text{ con } H' \in \mathcal{D} \end{cases}$

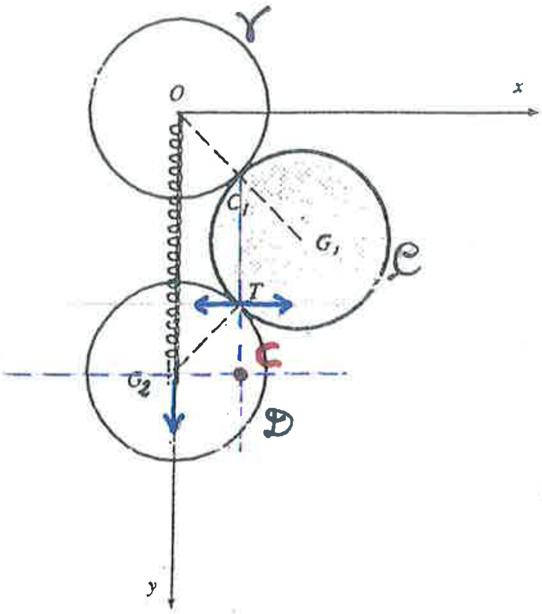


A $x_C = x_H$; B $y_C = y_{O_2}$; C $x_C = x_K$; D nessuna.

C = retta $Hx \cap$ retta $TK \Rightarrow$ C

T: c.i.r. di $\mathcal{C}_2$

Nel cinematismo descritto in figura la circonferenza omogenea $\mathcal{C}$ (raggio r e centro G_1) rotola senza strisciare sulla circonferenza fissa γ (raggio r e centro O) e sul bordo del disco $\mathcal{D}$, il cui centro G_2 scorre su Oy. Detto C il centro di istantanea rotazione di $\mathcal{D}$, determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta.



γ fissa

C_1 c.i.r. di $\mathcal{C}$. $\bar{v}_{C_1} = \bar{0}$

$\bar{v}_T = \bar{\omega} \times (T - C_1)$ è $\perp$ $(T - C_1)$

A $x_C = x_{G_2}$; B $x_C = x_T$; C $y_C = y_{C_1}$; D $y_C = y_{G_1}$.

In base al teorema di Chasles, il centro istantaneo del disco $\mathcal{D}$ deve giacere sulla perpendicolare a $\vec{v}_{G_2}$. D'altra parte

$$\vec{v}_T = \vec{v}_{C_1} + \vec{\omega} \wedge (T - C_1)$$

è perpendicolare a $(T - C_1)$. Pertanto C deve giacere anche sulla perpendicolare a $\vec{v}_T$. Quindi

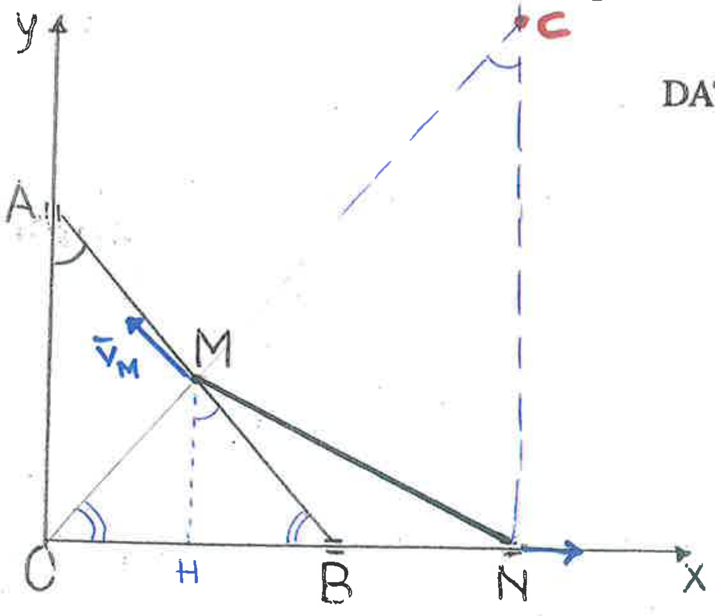
F1: $x_C = x_T$. B

F2: $y_C = y_{G_2}$. A

F3: $x_C = x_{C_1}$. C

F4: $x_C = x_T$. D

5) Determinare l'ordinata del centro di istantanea rotazione dall'asta MN avente l'estremo N scorrevole su Ox e l'estremo M incernierato nel punto medio dell'asta AB:



DATI: $MN=\sqrt{3}\,R$

$AB=2R$

$O\hat{A}B=30°$

A $2R$; B $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,R$; C $2\sqrt{3}\,R$; D $(\sqrt{3}+2)R$.

$\overline{OB} = R$

$\overline{MH} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ $\quad \overline{MH} = \overline{MN}/2 \Rightarrow \overline{HN} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{MN} = \frac{3}{2}R$

$\overline{ON} = \frac{R}{2} + \frac{3}{2}R = 2R$

$\overline{OC} = 2\overline{ON} = 4R$

$\overline{CN} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4R = 2\sqrt{3}R.$

4) Comporre i seguenti stati cinetici rotatori:

$$v_i = \omega_i \times (P - O_i) \qquad i=1,2,3$$

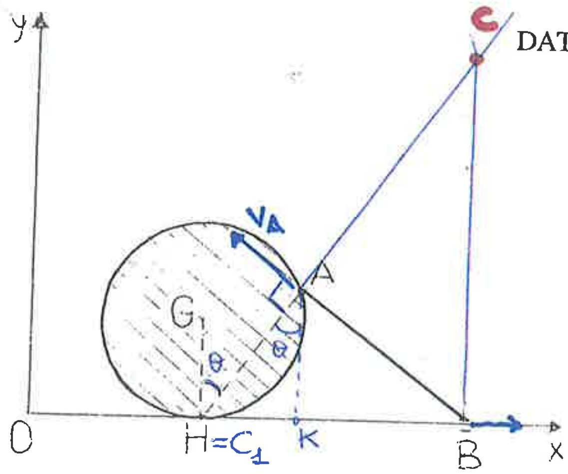
dove

$O_1(1,0,1)$ $\omega_1(1,-1,0)$
$O_2(0,1,1)$ $\omega_2(0,1,-1)$
$O_3(1,1,0)$ $\omega_3(-1,0,1)$

e determinare lo stato cinetico risultante:

A elicoidale; B rotatorio; C traslatorio; D nullo.

5) Determinare l'ordinata del centro di istantanea rotazione dall'asta AB avente l'estremo B scorrevole su Ox e l'estremo A incernierato sul bordo di un disco che rotola senza strisciare su Ox:



DATI: AB=2R
OH=R , GH = R
GHA= 45°

$\overline{AK} = \overline{AH}\cos\theta$
$\overline{HK} = \overline{AH}\sin\theta$ per $\theta = \frac{\pi}{4}$
$\overline{AH} = 2R\cos\theta$

$\overline{AK} = R$
$\overline{HK} = R$
$\overline{AH} = \sqrt{2}R$

$\Rightarrow \overline{KB} = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3}R$

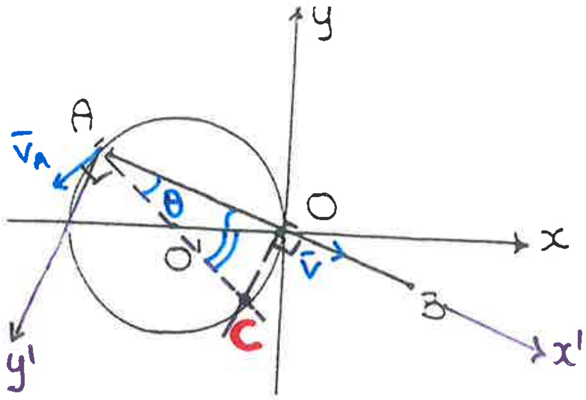
$\overline{HB} = R + \sqrt{3}R = (\sqrt{3}+1)R$

$\overline{HB} = \overline{CB}$

A $3R$; B $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,R$; C $\sqrt{3}\,R$; D $(\sqrt{3}+1)R$.

Avvertenze:
La durata complessiva della prova è di 3 ORE.
Per la prima parte (TEST):
1- non è consentito l'uso della calcolatrice, nè la consultazione di testi e appunti.
2- consegna al termine della prima ora.
3- punti 2 per risposta esatta, punti 0 per risposta non crocettata, punti -1 per risposta errata.
4- ammissione alla seconda parte con punti 5.

4) Nel piano Oxy, sia data l'asta AB, di lunghezza L, vincolata a passare per il punto O ed avente l'estremo A scorrevole sulla circonferenza fissa di centro $O'=(-R,0)$ e raggio R. Determinare il luogo geometrico descritto dal centro di istantanea rotazione dell'asta in un riferimento solidale con essa.



$$\begin{cases} x_c = -R(1-\cos 2\theta) \\ y_c = -R\sin 2\theta \end{cases} \Rightarrow (x+R)^2+y^2=R^2$$

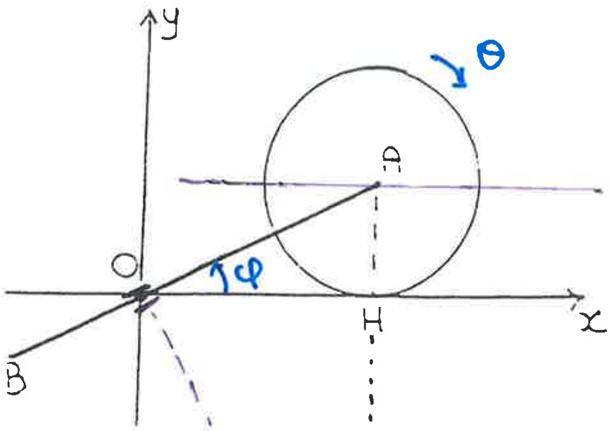
base

$$\begin{cases} x'_c = 2R\cos\theta \\ y'_c = 2R\sin\theta \end{cases} \quad x'^2+y'^2=4R^2$$

rulletta

A retta; B parabola; C circonferenza; D ellisse.

4) Nel piano Oxy, sia data l'asta AB, vincolata a passare per O ed avente il vertice A incernierato nel centro del disco, di raggio R, che rotola senza strisciare su Ox. Deteminare la traiettoria descritta dal centro di istantenea rotazione dell'asta, rispetto al riferimento fisso.



$x_A = R\theta$; $\overline{OA} = \frac{R\theta}{\cos\varphi}$; $\overline{AH} = R\theta \operatorname{tg}\varphi$

$\operatorname{cotg}\varphi = \theta$

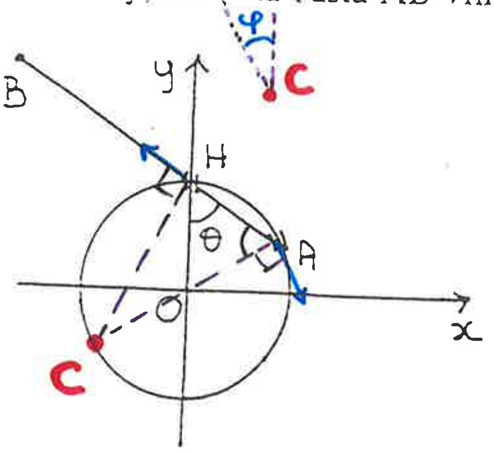
$\overline{HC} = \overline{OC}\cos\varphi = \overline{OH}\operatorname{cotg}\varphi = R\theta^2$

$C(R\theta, -R\theta^2)$

$y = -\frac{1}{R}x^2$ base

A retta; B circonferenza; C parabola; D ellisse.

4) Nel piano Oxy, sia data l'asta AB vincolata a passare per il punto $H=(0,R)$ ed avente l'estremo A scorrevole sulla circonferenza di centro 0 e raggio R. Calcolare l'ordinata del centro di istantanea rotazione dell'asta quando essa passa per la posizione $\theta = \pi/3$.



$x_c = -R\cos(2\theta - \frac{\pi}{2}) = -R\sin 2\theta$

$H\hat{O}A = \pi - 2\theta$

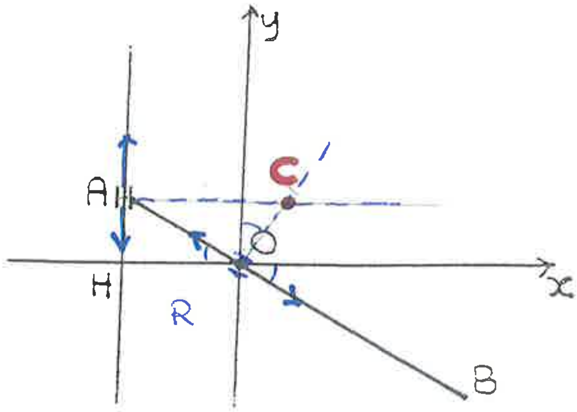
$A\hat{O}x = \frac{\pi}{2} - \pi + 2\theta = 2\theta - \frac{\pi}{2}$

$y_c = -R\sin(2\theta - \frac{\pi}{2}) = +R\cos 2\theta$

A $-R$; B $\frac{R}{2}$; C $-\frac{R}{2}$; D R.

$2\theta = \frac{2}{3}\pi \quad \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

4) Nel piano Oxy, sia data l'asta AB, vincolata a passare per O ed avente il vertice A scorrevole sulla retta x = – R. Deteminare la traiettoria descritta dal centro di istantenea rotazione dell'asta, rispetto al riferimento fisso.



$\overline{OH} = \overline{OA}\cos\theta \qquad \overline{OA} = \dfrac{R}{\cos\theta}$

$\overline{AH} = \dfrac{R}{\cos\theta}\sin\theta = R\,tg\,\theta$

- $y_C = R\,tg\,\theta$

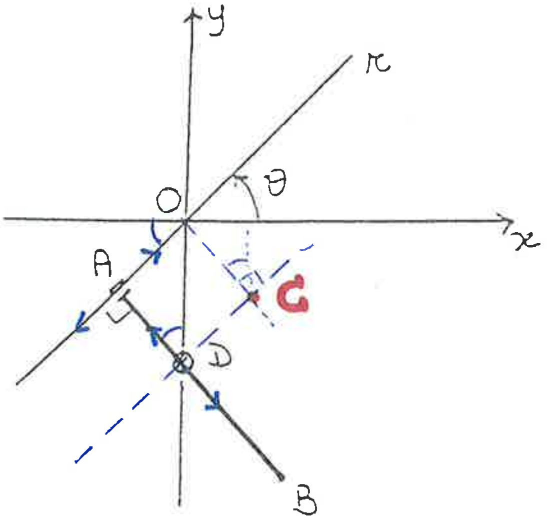
$y_C = \overline{OC}\cos\theta \qquad \overline{OC} = \dfrac{R\sin\theta}{\cos^2\theta}$

- $x_C = \overline{OC}\sin\theta = R\,tg^2\theta$

A retta; B circonferenza; C parabola; D ellisse.

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{R}y^2$

4) Nel piano Oxy, sia data l'asta AB vincolata a passare per il punto D = (0,–R) ed avente l'estremo A scorrevole sulla retta *r* (incernierata in O), in modo che l'asta sia sempre ortogonale alla retta *r*. Calcolare l'ascissa del centro di istantanea rotazione dell'asta quando essa passa per la posizione θ = π/8.



$\overline{OA} = R\sin\theta$

$A\left(-R\sin\theta\cos\theta,\ -R\sin^2\theta\right)$

$\bar{V}_A = \left(-\dfrac{R}{2}\cos 2\theta\,\dot\theta,\ -2R\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta\right)$, $\quad -2R\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta = -R\sin 2\theta\,\dot\theta$

Per Chasles C ∈ retta // r passant per D.

A $\dfrac{R}{2}$; B $\dfrac{R}{4}$; C $\dfrac{R\sqrt{2}}{4}$; D $\dfrac{R\sqrt{3}}{4}$.

$\bar{V}_A = \underset{\overset{\|\|\|}{0}}{\bar{V}_C} + \bar\omega \times (A - C) = \dot\theta\bar{k} \times \left[\left(-\frac{R}{2}\sin 2\theta - x_C\right)\bar{\imath} + \left(-R\sin^2\theta - y_C\right)\bar{\jmath}\right]$

$= -\left(-R\sin^2\theta - y_C\right)\dot\theta\,\bar{\imath} + \left(-\frac{R}{2}\sin 2\theta - x_C\right)\dot\theta\,\bar{\jmath}$

$\begin{cases} -R\cos 2\theta\,\cancel{\dot\theta} = \left(R\sin^2\theta + y_C\right)\cancel{\dot\theta} \\ -R\sin 2\theta\,\cancel{\dot\theta} = \left(-\frac{R}{2}\sin 2\theta - x_C\right)\cancel{\dot\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_C = -R\cos^2\theta \\ x_C = \frac{R}{2}\sin 2\theta \end{cases}$

C è opposto ad A (rettangolo OADC)

per $\theta = \frac{\pi}{8}$