PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

$$\delta L^{(a)} = \sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s(x_e, 0, t)\cdot \delta P_s \leq 0 \quad \begin{cases} = 0 & \forall \delta P_s \text{ invertibile} \\ \leq 0 & \forall \delta P_s \text{ non invert.} \end{cases}$$

Se (S, ν) è olonomo:

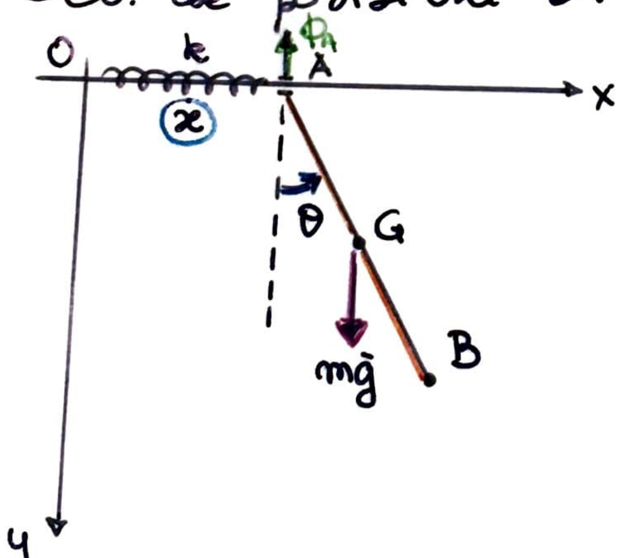
$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x_e, 0, t)\, \delta q_i \leq 0$$

vincoli fissi

dove $Q_i = \sum_{s=1}^{N} \bar{F}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i}$ $\qquad \delta P_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_i}\delta q_i$

1) asta $\overline{AB}$ omogenea di massa m e lunghezza ℓ mobile nel piano verticale Oxy con l'estremo A vincolato a scorrere senza attrito su Ox e soggetto oltre al peso ad una forza elastica $\bar{F} = -k(A-O)$, $k>0$.

Det. le posizioni di equilibrio dell'asta.



sist. olonomo con 2 g.d.l.

$q_1 = x_A = x \in \mathbb{R}$ $\quad$ sp. virt.

$q_2 = \theta \in [0, 2\pi)$ $\quad$ invertibili

vincoli fissi $\Rightarrow$ posso applicare le PLV.

$$\delta L^{(a)} = m\bar{g}\cdot\delta G - k(A-O)\cdot\delta A = mg\,\delta y_G - k x_A\, \delta x_A$$

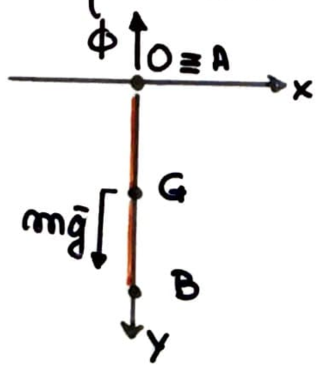
$$y_G = \frac{\ell}{2}\cos\theta \qquad \delta y_G = -\frac{\ell}{2}\sin\theta\,\delta\theta$$

$$\delta L^{(a)} = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta\,\delta\theta - kx\,\delta x = Q_x\,\delta x + Q_\theta\,\delta\theta = 0$$

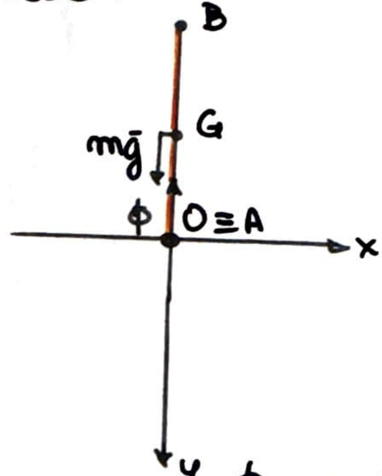
$$\Rightarrow Q_x = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad Q_\theta = 0 \quad \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0,\ \theta = \pi$$

$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{\theta}) : (0,0) ; (0,\pi)$

tutti gli spostamenti virtuali sono invertibili $\Rightarrow$ ho solo posiz. di equilibrio ordinarie.

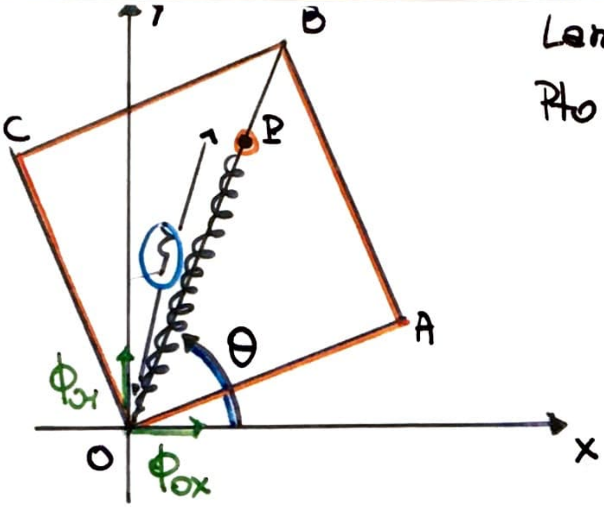


$\Phi_A = mg$



$\Phi_A = mg$ ■

2) Un sistema materiale è costituito da una lamina quadrata di massa M e diagonale lunga 2ℓ girevole attorno allo spigolo O fisso nel piano verticale Oxy senza attrito e da un pto mat. (P, m) scorrevole senza attrito lungo la diagonale OB. Oltre alla fu fesa al punto P è applicata una molla di costante elastica $k = 3mg/\ell$ e lunghezza a riposo $l_0 = \frac{\ell}{2}$ che lo collega ad O (origine). Det. le configurazioni ordinarie e di confine di equilibrio per il sistema (L, P) e la reazione vincolare $\bar{\Phi}_O$ all'equilibrio e la reazione vincolare interna in P, $\bar{\Phi}_P$ all'equilibrio.



Lam: M, $\overline{OB} = 2\ell$ $\quad k = 3mg/\ell$

Pto: m $\quad \ell_0 = \frac{\ell}{2}$ lungh. a riposo

sist. olonomo con 2.g.d.l.

$q_1 = \theta \in [0, 2\pi)$

$q_2 = \xi_P = \xi$ lungo $\overline{OB}$.

$$\bar{F}_P = -k(\xi - \ell_0)\,\text{vers}(P-O) \Rightarrow \underline{\ell_0 \le \xi \le 2\ell}$$

$$\delta L^{(a)} \underset{eq.}{=} Q_\xi\,\delta\xi + Q_\theta\,\delta\theta \le 0$$

posiz. ordinarie $\Rightarrow$ δP rivert. $\delta L^a = 0$

posiz. eq. di confine $\Rightarrow$ δP non rivert. $\delta L^a \le 0$.

Poichè le forze attive sono conservative $\delta L = \delta U$

e $Q_\xi = \frac{\partial U}{\partial \xi}$, $Q_\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta}$

Per il calcolo delle posiz di eq. ordinarie posso usare il metodo della stazionarietà del potenziale con $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\xi \in \underline{(\ell_0, 2\ell)}$.

$$U = -Mg\,y_G - mg\,y_P - \frac{1}{2}k(\xi - \ell_0)^2 + c$$

$$= -Mg\,\ell\,\text{sen}\theta - mg\,\xi\,\text{sen}\theta - \frac{1}{2}k\left(\xi - \frac{\ell}{2}\right)^2 + c$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \xi} = U_\xi = -mg\,\text{sen}\theta - k\left(\xi - \frac{\ell}{2}\right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = U_\theta = -g\underbrace{(M\ell + m\xi)}_{>0}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$\cos\theta = 0$

$\Downarrow$

$\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{2} \quad -mg - 3mg/\ell\,(\zeta - \frac{\ell}{2}) = 0 \Rightarrow \zeta = \frac{\ell}{6}$ non acc. $\notin (\ell/2, 2\ell)$

$\theta = \frac{3}{2}\pi \quad mg - 3mg/\ell\,(\zeta - \frac{\ell}{2}) = 0 \Rightarrow \zeta = \frac{5}{6}\ell$ accett.

$\Rightarrow !$ posiz. di eq. ord. $(\bar{\zeta}, \bar{\theta})$: $(\frac{5\ell}{6}, \frac{3}{2}\pi)$

$$\delta L^a = -mg\left[\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{\ell}\left(\zeta - \frac{\ell}{2}\right)\right]\delta\zeta - g(M\ell + m\zeta)\cos\theta\,\delta\theta \leq$$

poiché $\forall \theta$ $\delta\theta$ è invertibile $\Rightarrow Q_\theta(q_e, 0, t) = 0$

quindi

$$\delta L^a = Q_\zeta\,\delta\zeta \leq 0$$

per $\zeta = \frac{\ell}{2}$ $\quad \delta\zeta \geq 0 \Rightarrow Q_\zeta \leq 0$

per $\zeta = 2\ell$ $\quad \delta\zeta \leq 0 \Rightarrow Q_\zeta \geq 0$

$Q_\theta = 0 \Rightarrow -g\underbrace{(M\ell + m\zeta)}_{>0}\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \ \theta = \frac{3}{2}\pi$

$$Q_\zeta(\zeta, \theta) = -mg\left[\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{\ell}\left(\zeta - \frac{\ell}{2}\right)\right]$$

$Q_\zeta(\frac{\ell}{2}, \frac{\pi}{2}) = -mg < 0$ accett.

$Q_\zeta(\frac{\ell}{2}, \frac{3}{2}\pi) = mg > 0$ non acc.

$Q_\zeta(2\ell, \frac{\pi}{2}) = -\frac{11}{2}mg < 0$ non acc.

$Q_\zeta(2\ell, \frac{3}{2}\pi) = -\frac{7}{2}mg < 0$ non acc.

$\Rightarrow !$ posiz. di eq. di confine: $(\frac{\ell}{2}, \pi/2)$.

Calcolo della reazione vincolare esterna Φ_0 all'equilibrio.

Con le eq. card. della statica (basta la prima).

$\bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0}$ la molla è forza esterna

$M\bar{g} + m\bar{g} - k(\xi - l_0)\,\mathrm{vers}(P-O) + \bar{\Phi}_0 = \bar{0}$

proiettata sugli assi del rif. Oxy:

$$\begin{cases} -k\left(\xi - \frac{l}{2}\right)\cos\theta + \Phi_{0x} = 0 \\ -(M+m)g - k\left(\xi - \frac{l}{2}\right)\operatorname{sen}\theta + \Phi_{0y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_{0x} = k\left(\xi - \frac{l}{2}\right)\cos\theta \\ \Phi_{0y} = (M+m)g + k\left(\xi - \frac{l}{2}\right)\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Nelle conf. di equilibrio:

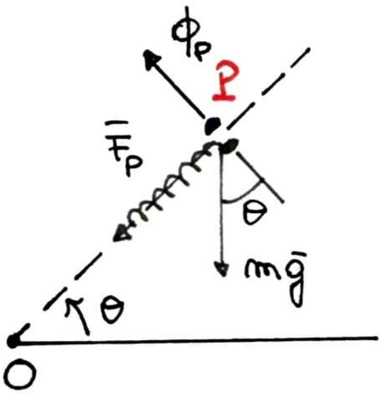
$\left(\frac{5}{6}d, \frac{3}{2}\pi\right)$: $\Phi_{0x} = 0$; $\Phi_{0y} = Mg$

$\left(\frac{l}{2}, \pi/2\right)$: $\Phi_{0x} = 0$; $\Phi_{0y} = (M+m)g$.

N.B. : Se nel testo la molla collegasse P con O vertice della lamina allora la forza elastica sarebbe una forza interna al sistema pto + lamina e non deve comparire in $\bar{R}^e$.

Poichè in P la reazione vincolare è interna, per determinarla devo svincolare il sistema punto-lamina.

Considero solo il pto materiale (P, m).



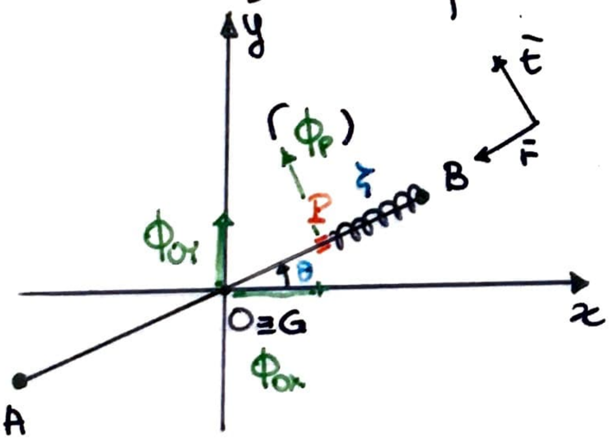
$$\Rightarrow \Phi_P - mg\cos\theta = 0$$

$$\Phi_P = mg\cos\theta_e$$

$$\text{ma } \theta_e = \pm\pi/2 \Rightarrow \bar{\Phi}_P(\pm\pi/2) \equiv \bar{0}$$

Per $\theta = \pm\pi/2$ $B \in Oy$ e non c'è nessuna forza orizzontale che vada ad equilibrare Φ_P in θ_e.

3) Un (S, m) è costituito da un'asta AB $(m, 2\ell)$ avente il baricentro fisso in O (origine di Oxy verticale) e da un pto (P, m) vincolato a scorrere su $\overline{AB}$. Oltre al peso, una molla di costante elastica $k = mg\,\lambda/\ell$, $(\lambda > 0)$, collega il punto P con l'estremo B dell'asta. Supposti i vincoli lisci det. configurazioni di equilibrio e reazioni vincolari (esterne e interne) all'equilibrio.



$$\begin{cases} q_1 = \theta & \theta \in [0, 2\pi) \\ q_2 = \xi_P = \xi & \xi \in [0, 2\ell] \end{cases}$$

$$\bar{F}_P = -k(P-B) = -k\xi\,\bar{r}$$

$$\bar{F}_B = -\bar{F}_P = k\xi\,\bar{r}$$

la molla è forza <u>INTERNA</u>

- Pos. di eq. ordinarie: $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\xi \in (0, 2\ell)$

$$\delta L^{(a)} = \cancel{m\bar{g}\cdot\delta O} + m\bar{g}\cdot\delta P - k(P-B)\cdot\delta P + k(P-B)\cdot\delta B = 0$$

$$= -mg\,\delta y_P - k\xi\,\bar{r}\cdot\delta P + \cancel{k\xi\,\bar{r}\cdot\delta B}$$

$$\delta P = \delta\xi\,\bar{r} + (\ell-\xi)\,\delta\theta\,\bar{t} \qquad y_P = (\ell-\xi)\operatorname{sen}\theta$$

$$\delta B = \ell\,\delta\theta\,\bar{t} \qquad \delta y_P = (\ell-\xi)\cos\theta\,\delta\theta - \operatorname{sen}\theta\,\delta\xi$$

$$\delta L^{a} = -mg(\ell-\xi)\cos\theta\,\delta\theta + mg\operatorname{sen}\theta\,\delta\xi - k\xi\,\delta\xi$$

$$= Q_\theta\,\delta\theta + Q_\xi\,\delta\xi = 0$$

$$\begin{cases} Q_\theta = -mg(\ell-\xi)\cos\theta = 0 \\ Q_\xi = mg\left(\operatorname{sen}\theta - \dfrac{\lambda}{\ell}\xi\right) = 0 \end{cases}$$

$Q_\theta = 0 \Rightarrow \xi = \ell$ o $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm \pi/2$

se $\xi = \ell$ $\quad \operatorname{sen}\theta - \lambda = 0 \quad \operatorname{sen}\theta = \lambda > 0 \quad \theta_1 = \operatorname{arc\,sen}\lambda$

con $0 < \lambda \leq 1$ $\qquad \theta_2 = \pi - \theta_1$

se $\theta = \pi/2 \quad 1 - \frac{\lambda}{\ell}\xi = 0 \quad \xi = \frac{\ell}{\lambda} > 0 \quad \xi < 2\ell \Rightarrow \lambda > \frac{1}{2}$

se $\theta = -\pi/2 \quad -1 + \frac{\lambda}{\ell}\xi = 0 \quad \xi = -\frac{\ell}{\lambda} < 0$ $\nexists$ non acc.

$$\Rightarrow \begin{cases} (\ell, \theta_1)\,;\,(\ell, \pi - \theta_1) & \text{per } 0 < \lambda \leq 1 \\ \left(\frac{\ell}{\lambda}, \pi/2\right) & \text{per } \lambda > \frac{1}{2} \end{cases}$$

- allo stesso risultato si perviene utilizzando la S.P.

$$U = -mg\,y_P - \frac{1}{2}k\,\overline{PB}^2 + c = -mg(\ell - \xi)\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}k\xi^2 + c$$

$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$ poiché le forze sono conservative.

- Pos. di eq. di confine:

$$\delta L^a = Q_\theta\,\delta\theta + Q_\xi\,\delta\xi \leq 0$$

$\forall \theta \quad \delta\theta$ è invertibile $\Rightarrow Q_\theta = 0$

$$\delta L^a = Q_\xi\,\delta\xi \leq 0$$

per $\xi = 0 \quad \delta\xi \geq 0 \Rightarrow Q_\xi \leq 0$

per $\xi = 2\ell \quad \delta\xi \leq 0 \Rightarrow Q_\xi \geq 0$

$Q_\theta(\xi, \theta) = -mg(\ell - \xi)\cos\theta$

$Q_\theta(0, \theta) = -mg\ell\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm\pi/2$ $\qquad (0, \pm\pi/2)$

$Q_\theta(2\ell, \theta) = mg\ell\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm\pi/2$ $\qquad (2\ell, \pm\pi/2)$

$Q_\xi(\xi, \theta) = mg\left(\operatorname{sen}\theta - \frac{\lambda}{\ell}\xi\right)$

$Q_\zeta(0, \frac{\pi}{2}) = mg > 0$ non acc.

$Q_\zeta(0, -\frac{\pi}{2}) = -mg < 0$ accett.

$Q_\zeta(2\ell, \pi/2) = mg(1-2\lambda) \geq 0$ per $0<\lambda \leq \frac{1}{2}$

$Q_\zeta(2\ell, -\pi/2) = -mg(1+2\lambda) < 0$ non acc.

$$\Rightarrow \begin{cases} (0, -\pi/2) & \forall \lambda > 0 \\ (2\ell, \pi/2) & \text{per } 0<\lambda \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

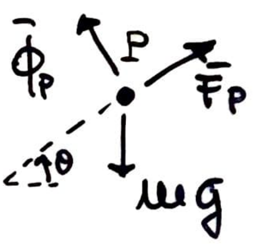
- calcolo delle reazioni vincolari $\bar{\Phi}_0$ (est.) ; $\bar{\Phi}_P$ (int).

Considero $(S, m) = (\overline{AB} + P) \Rightarrow$ la molla è interna.

$\bar{R}^e + \bar{\Phi}^e = \bar{0} \Rightarrow m\bar{g} + m\bar{g} + \bar{\Phi}_0 = \bar{0}$

$\Rightarrow \bar{\Phi}_0 = 2mg\,\bar{J}$ in ogni posiz. di equilibrio

Per det. $\bar{\Phi}_P$ considero il solo (P, m).



$m\bar{g} - k(P-B) + \bar{\Phi}_P = \bar{0}$ proiettata su $(\bar{r}, \bar{t})$

$\Phi_P - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow \Phi_P = mg\cos\theta$

$(\frac{\ell}{\lambda}, \frac{\pi}{2})$ $\bar{\Phi}_P = \bar{0}$

(ℓ, θ_1) $\bar{\Phi}_P = mg\sqrt{1-\lambda^2}\,\bar{t}$

$(\ell, \pi-\theta_1)$ $\bar{\Phi}_P = -mg\sqrt{1-\lambda^2}\,\bar{t}$

$(0, -\frac{\pi}{2})$ $\bar{\Phi}_P = \bar{0}$

$(2\ell, \pi/2)$ $\bar{\Phi}_P = \bar{0}$