CINEMATICA

La cinematica studia il moto dei corpi da un punto di vista descrittivo indipendentemente dalle leggi fisiche che lo legano alle cause (forze) che lo determinano.

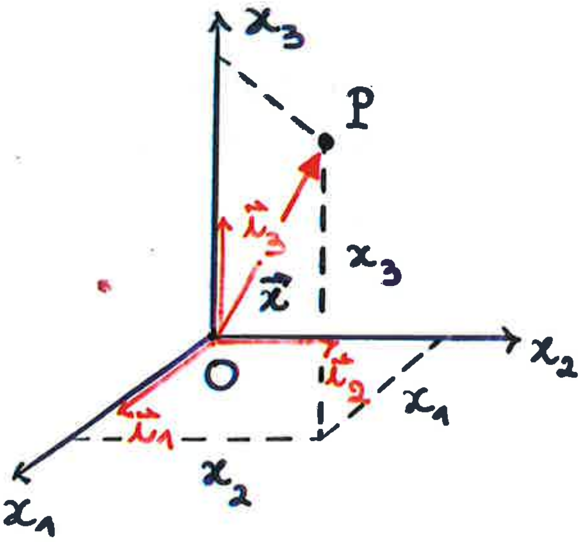
Ogni fenomeno di moto avviene in un ambiente SPAZIO - TEMPORALE

SPAZIO: spazio euclideo affine tridimensionale $\mathcal{E}$ i cui elementi sono chiamati **punti** $(P, Q, \dots)$

$\mathcal{E}$ contiene un sottogruppo V, detto gruppo delle traslazioni che risulta uno spazio vettoriale euclideo tridimensionale i cui elementi sono chiamati **vettori** $(\bar{u}, \bar{v}, \dots)$.

TEMPO: spazio euclideo unidimensionale orientato $\mathbb{R}$ i cui elementi sono chiamati **istanti**.

Sistema di riferimento in $\mathcal{E}$



$Ox_1x_2x_3$ sistema di riferimento

$(\vec{\imath}_1, \vec{\imath}_2, \vec{\imath}_3)$ versori (base)

Ogni vettore $\vec{x} = P - O$ si rappresenta:

$$\vec{x} = x_1 \vec{\imath}_1 + x_2 \vec{\imath}_2 + x_3 \vec{\imath}_3$$

$$x_J = \vec{x} \cdot \vec{\imath}_J \qquad J = 1, 2, 3$$

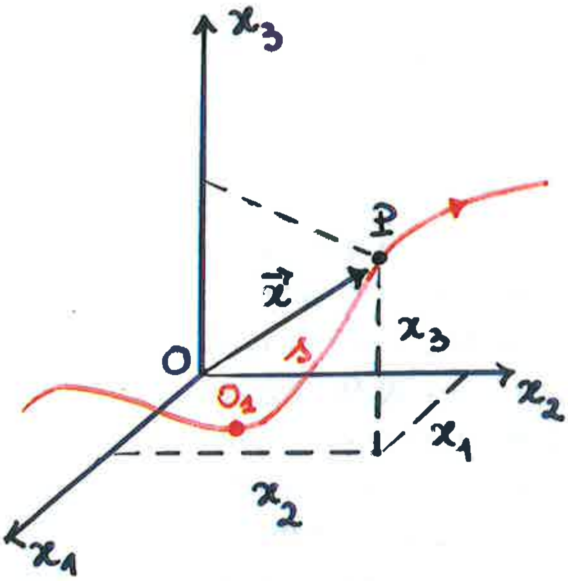
Definizione : Chiamiamo osservatore un sistema di riferimento solidale con un CORPO RIGIDO(*) insieme con un sistema di misura del tempo (orologio).

(*)

Un corpo rigido è un sistema materiale $\mathcal{B}$, cioè un insieme finito o infinito di elementi detti punti materiali, che conserva nel tempo la mutua distanza tra i suoi punti materiali.

A volte, il sistema di riferimento solidale con un corpo rigido sarà confuso con la terna ortogonale $Ox_1x_2x_3$.

MOTO DI UN PUNTO



Il moto di un punto materiale risulta definito dalla applicazione:

$$\hat{P} : I \longrightarrow \mathcal{E}'$$

$I \subset \mathbb{R}$: intervallo temporale

$\mathcal{E}'$: sp. euclideo associato all'osservatore

Espressioni equivalenti del moto:

$$P = \hat{P}(t)$$

$$\vec{x}(t) = \hat{P}(t) - O$$

$$x_k = \hat{x}_k(t) \qquad k = 1, 2, 3$$

Le funzioni che definiscono il moto sono supposte almeno di classe C^2.

L'immagine dell'intervallo I in $\mathcal{E}'$ definisce la traiettoria del punto P relativa al moto $P(t)$.

Definizione intrinseca della traiettoria di P: è il supporto geometrico del moto (CURVA SEMPLICE in $\mathcal{E}'$).

Sia O_1 un punto fissato sulla traiettoria, scelto un verso positivo, indichiamo con s l'ascissa curvilinea di P, cioè la distanza di P da O_1 lungo la traiettoria.

$$\text{moto di } P: \begin{cases} P = \hat{P}(s) & \text{eq. intrinseca traiettoria} \\ s = \hat{s}(t) & \text{legge oraria} \end{cases}$$

Le proiezioni di $P = \hat{P}(s)$ sono:

$$x_k = \hat{x}_k(s) \qquad k = 1, 2, 3.$$

Def: Chiamiamo velocità scalare del punto P lungo la traiettoria $\hat{P}(s)$ la derivata di $\hat{s}$ rispetto al tempo:

$$v(t) := \frac{d}{dt}\hat{s}(t) = \dot{s}(t)$$

$\dot{s} > 0$ moto diretto

$\dot{s} < 0$ moto retrogrado

$\dot{s}(t_0) = 0$ t_0 istante di arresto

Se $\dot{s}(t) = \text{costante} := v_0 \Rightarrow \hat{s}(t) = v_0 t + s_0$ moto uniforme.

Def: Chiamiamo velocità del punto P (vettoriale) rispetto ad un osservatore $Ox_1x_2x_3$ il vettore:

$$\vec{v}(t) := \frac{d}{dt}\hat{P}(t) = \frac{d}{dt}(\hat{P}(t) - O)$$

Poiché $\hat{P}(t) - O = \vec{x}(t) = x_1(t)\,\vec{i}_1 + x_2(t)\,\vec{i}_2 + x_3(t)\,\vec{i}_3$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{3} \dot{x}_k(t)\,\vec{i}_k$$

Osservazione: Ricordando l'espressione per il moto del punto P:

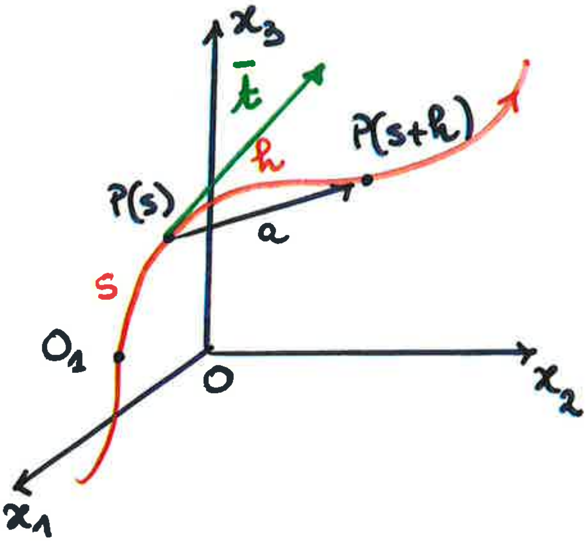
$$P = \hat{P}(\hat{s}(t))$$

si ha

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{ds}\hat{P}(s)\,\frac{d\hat{s}}{dt} = \frac{d}{ds}\hat{P}(s)\,\dot{s}(t)$$

Consideriamo la quantità:

$$\frac{d}{ds}\hat{P}(s) = \lim_{h\to 0} \frac{\hat{P}(s+h) - \hat{P}(s)}{h}$$



Il rapporto incrementale è un vettore diretto secondo la corda "a" e verso concorde con quello degli archi crescenti.

Per $h \to 0$ tale rapporto tende ad un vettore parallelo alla tangente alla curva in $P(s)$ e

$$\left|\frac{d\hat{P}}{ds}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\hat{P}(s+h) - \hat{P}(s)}{h}\right| = 1$$

quindi

$$\frac{d}{ds}\hat{P}(s) = \vec{t}(s)$$ versore tangente alla curva in $\hat{P}(s)$ e pertanto

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{s}\,\vec{t}}$$

Osservazioni

1) la velocità risulta sempre tangente alla traiettoria nel punto considerato;

2) il modulo della velocità è dato da:

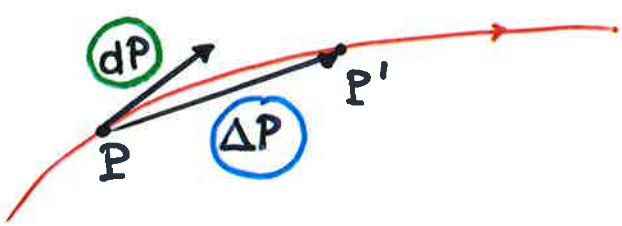
$$|\vec{v}| = \|\vec{v}\| = v = |\dot{s}| = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}$$

3) la velocità $\vec{v}$ è costante (vettorialmente) in $I \subset \mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$ in tale intervallo il moto è rettilineo e uniforme.

Def. Chiamiamo spostamento elementare il vettore

$$\boxed{dP := \vec{v}\,dt}$$

In generale non rappresenta uno spostamento reale, ma lo approssima bene per "piccoli" valori di dt.



Def.: Chiamiamo accelerazione del punto P rispetto all'osservatore $(Ox_1x_2x_3)$ il vettore:

$$\vec{a}(t) := \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\hat{P}(t) = \frac{d^2}{dt^2}(\hat{P}(t)-O) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t)$$

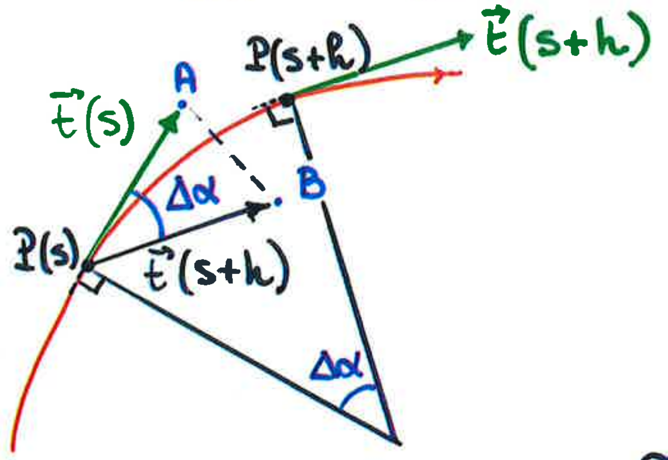
$$\vec{a}(t) = \ddot{x}_1(t)\vec{i}_1 + \ddot{x}_2(t)\vec{i}_2 + \ddot{x}_3(t)\vec{i}_3$$

Inoltre ricordando che $\vec{v} = \dot{s}\vec{t} = \dot{s}(t)\vec{t}(\hat{s}(t))$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{t}) = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}\frac{d}{dt}\vec{t}(s(t)) = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}^2\frac{d\vec{t}}{ds}}$$

Consideriamo

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)}{h}$$



π_h: piano individuato da $P(s)$, A, B.

π: piano osculatore individuato da $P(s)$ e $\vec{t}(s)$.

- Se la curva è piana π_h coincide con il piano su cui giace la curva
- Se la curva non è piana $\pi_h \to \pi$ per $h \to 0$.
- $\dfrac{\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)}{h}$ è diretto come B − A.

$\Rightarrow \dfrac{d\vec{t}}{ds} \in \pi$ e $\boxed{\dfrac{d\vec{t}}{ds} \perp \vec{t}}$ (perchè $\vec{t}$ è costante in modulo

$$\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \lim_{h\to 0} \frac{|\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)|}{|h|} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{|\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)|}{\Delta\alpha}}_{\overset{(\bullet)}{\downarrow}\, 1} \cdot \frac{\Delta\alpha}{|h|}$$

Poniamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta\alpha}{|h|} = \frac{1}{\rho}$$

dove

$\dfrac{1}{\rho}$ curvatura

ρ raggio di curvatura della traiettoria

Indichiamo con $\vec{n}(s)$ il versore detto normale principale alla curva in $P(s)$ orientato verso il centro di curvatura e normale alla curva, si ha:

$$\boxed{\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n}}$$ PRIMA FORMULA DI FRENET

allora

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{s}\,\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}} \in \pi$$

Osservazioni

1) $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$, con $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$ detto versore binormale è detta terna intrinseca.

2) la componente di $\vec{a}$ lungo la tangente:

$\boxed{\vec{a}_t = \ddot{s}\,\vec{t}}$ è detta accelerazione tangenziale

3) la componente di $\bar{a}$ lungo la normale principale:

$\boxed{\vec{a}_n = \frac{1}{\rho} \dot{s}^2 \bar{n}}$ è detta accelerazione centripeta

4) quando $\boxed{\bar{a}_t = \bar{0}} \Rightarrow \ddot{s} = 0 \Rightarrow$ moto uniforme ($\dot{s}$=cost

quando $\boxed{\bar{a}_n = \bar{0}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\rho} = 0 \Rightarrow \text{moto rettilineo} \\ \text{oppure} \\ \dot{s} = 0 \Rightarrow \text{istante di arresto} \end{cases}$

quando $\boxed{\bar{a} = \bar{0}} \Rightarrow$ moto rettilineo uniforme

Def: Il moto di un punto P è detto accelerato (ritardato) in un intervallo, se il modulo della velocità $|\dot{s}|$ è funzione crescente (decrescente) di t nell'intervallo considerato.

moto accelerato $\Leftrightarrow \dot{s}\ddot{s} > 0$

moto ritardato $\Leftrightarrow \dot{s}\ddot{s} < 0$

$\left(\frac{d}{dt} \dot{s}^2 = 2 \dot{s} \ddot{s}\right)$

La crescenza (decrescenza) di $\dot{s}^2$ dipende dal segno di $\dot{s}\ddot{s}$.

(•)

$$\vec{t}(s+h) = (B-P)$$

$$\vec{t}(s) = (A-P)$$

$$\vec{t}(s+h) - \vec{t}(s) = (B-P) - (A-P) = (B-A)$$

$$|\vec{t}(s+h) - \vec{t}(s)| = |B-A|$$

Per Carnot

$$|B-A|^2 = \underset{1}{\underset{\parallel}{|A-P|^2}} + \underset{1}{\underset{\parallel}{|B-P|^2}} - 2\,\underset{1}{\underset{\parallel}{|A-P|}}\,\underset{1}{\underset{\parallel}{|B-P|}} \cos(\Delta\alpha)$$

$$= 2 - 2\cos\Delta\alpha = 2(1-\cos\Delta\alpha)$$

Dalla trigonometria

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow 1-\cos\Delta\alpha = 2\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2}$$

Pertanto

$$|\vec{t}(s+h) - \vec{t}(s)|^2 = |B-A|^2 = 4\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$|\vec{t}(s+h) - \vec{t}(s)| = 2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}$$

Ritorno a

$$\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \lim_{h\to 0} \frac{|\vec{t}(s+h) - \vec{t}(s)|}{\Delta\alpha \cdot |h|} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\text{[illegible]}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot\sin\Delta\alpha/2}{\Delta\alpha} \cdot \frac{\Delta\alpha}{|h|}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\Delta\alpha}{|h|} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{\sin\Delta\alpha/2}{\Delta\alpha/2}}_{=1} = \frac{1}{\rho}\cdot 1$$

$h\to 0$ anche $\Delta\alpha \to 0$