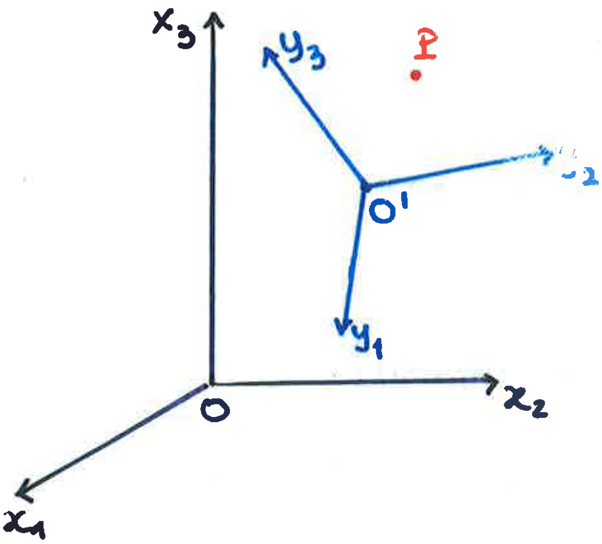
CINEMATICA DEI MOTI RELATIVI



Dati due sistemi di riferimento (O, x_1, x_2, x_3) e (O', y_1, y_2, y_3) in moto l'uno rispetto all'altro, dotati dello stesso sistema di misura del tempo.

Valgono:

Postulati della Meccanica Classica

1) la distanza tra 2 punti non dipende dall'osservatore;
2) esistenza del tempo assoluto (indipendente dall'osservatore).

Per comodità $Ox_1x_2x_3$ è detto riferimento fisso, $O'y_1y_2y_3$ è detto riferimento mobile.

Il moto di P rispetto al rif. fisso è detto assoluto ed è assegnato da:

$$P(t) - O = x_1(t)\,\bar{i}_1 + x_2(t)\,\bar{i}_2 + x_3(t)\,\bar{i}_3$$

Il moto di P rispetto al rif. mobile è detto relativo ed è assegnato da:

$$P(t) - O' = y_1(t)\,\bar{J}_1^{(t)} + y_2(t)\,\bar{J}_2^{(t)} + y_3(t)\,\bar{J}_3^{(t)}$$

Il moto del punto O' è assegnato da:

$$O'(t) - O = c_1(t)\,\bar{i}_1 + c_2(t)\,\bar{i}_2 + c_3(t)\,\bar{i}_3$$

E' nota inoltre

$$[\alpha_{hk}] = [\alpha_{hk}(t)]$$

Def: Chiamiamo velocità assoluta $\bar{v}_a$ del punto P la velocità di P rispetto al rif. $Ox_1x_2x_3$

$$\bar{v}_a = \dot{x}_1 \bar{i}_1 + \dot{x}_2 \bar{i}_2 + \dot{x}_3 \bar{i}_3$$

Chiamiamo velocità relativa $\bar{v}_r$ del punto P la velocità di P rispetto al rif. $O'y_1y_2y_3$

$$\bar{v}_r = \dot{y}_1 \bar{J}_1 + \dot{y}_2 \bar{J}_2 + \dot{y}_3 \bar{J}_3$$

Chiamiamo velocità di trascinamento $\bar{v}_\tau$ del punto P la velocità del punto della terna mobile che coincide con P, cioè è la velocità di P pensato rigidamente collegato con il rif. mobile

$$\bar{v}_\tau = \bar{v}_{O'} + y_1 \frac{d}{dt} \bar{J}_1 + y_2 \frac{d}{dt} \bar{J}_2 + y_3 \frac{d}{dt} \bar{J}_3 = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega}_\tau \times (P-O')$$

$$\frac{d}{dt} \bar{J}_k = \bar{\omega} \times \bar{J}_k$$

Teorema di composizione delle velocità

La velocità assoluta di un punto è data, in ogni istante, dalla somma delle velocità relativa e di trascinamento:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_\tau$$

Dim.: Dall'identità:

$$P(t) - O = [O'(t) - O] + [P(t) - O'(t)]$$

derivando rispetto al tempo t:

$$\frac{d}{dt} P(t) = \frac{d}{dt} O'(t) + \dot{y}_1 \bar{J}_1 + \dot{y}_2 \bar{J}_2 + \dot{y}_3 \bar{J}_3 + y_1 \frac{d}{dt} \bar{J}_1 + y_2 \frac{d}{dt} \bar{J}_2 + y_3 \frac{d}{dt} J_3$$

segue la tesi, utilizzando le definizioni.

: Chiamiamo accelerazione assoluta $\bar{a}_a$ del punto l'accelerazione di P rispetto al rif. $Ox_1x_2x_3$:

$$\bar{a}_a = \ddot{x}_1 \bar{\imath}_1 + \ddot{x}_2 \bar{\imath}_2 + \ddot{x}_3 \bar{\imath}_3$$

Chiamiamo accelerazione relativa $\bar{a}_r$ del punto l'accelerazione di P rispetto al rif. $O'y_1y_2y_3$:

$$\bar{a}_r = \ddot{y}_1 \bar{J}_1 + \ddot{y}_2 \bar{J}_2 + \ddot{y}_3 \bar{J}_3$$

Chiamiamo accelerazione di trascinamento $\bar{a}_\tau$ punto P l'accelerazione di P' punto della terna obile che coincide con P, cioè pensando P rigida= ente collegato col rif. mobile:

$$\bar{a}_\tau = \bar{a}_{O'} + y_1 \frac{d^2}{dt^2}\bar{J}_1 + y_2 \frac{d^2}{dt^2}\bar{J}_2 + y_3 \frac{d^2}{dt^2}\bar{J}_3$$

Chiamiamo accelerazione complementare o di oriolis il vettore:

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r \quad , \quad \text{con } \bar{\omega} = \bar{\omega}_\tau .$$

ove $\bar{v}_r$ è la velocità relativa del punto P ed $\bar{\omega}$ ale che $\frac{d}{dt}\bar{J}_h = \bar{\omega} \times \bar{J}_h$ (formule di Poisson).

Teorema di composizione delle accelerazioni o di CORIOLIS

L'accelerazione assoluta di un punto è data, in ogni istante, dalla somma delle accelerazioni relativa, di trascinamento e di Coriolis, cioè:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_\tau + \bar{a}_c$$

(*)

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_\tau$$

$$\bar{v}_a = \dot{x}_1 i_1 + \dot{x}_2 \bar{i}_2 + \dot{x}_3 \bar{i}_3$$

$$\bar{v}_r = \dot{y}_1 \bar{j}_1 + \dot{y}_2 \bar{j}_2 + \dot{y}_3 \bar{j}_3$$

$$\bar{v}_\tau = \underbrace{\dot{c}_1 \bar{i}_1 + \dot{c}_2 \bar{i}_2 + \dot{c}_3 \bar{i}_3}_{\bar{v}_{O'}} + \underbrace{y_1 \underbrace{\bar\omega\times\bar j_1}_{\frac{d}{dt}\bar j_1} + y_2 \underbrace{\bar\omega\times\bar j_2}_{\frac{d}{dt}\bar j_2} + y_3 \underbrace{\bar\omega\times\bar j_3}_{\frac{d}{dt} j_3}}_{\bar\omega\times(P-O')}$$

$$\bar a_a = \frac{d}{dt}\bar v_a = \sum_{k=1}^{3} \ddot x_k \bar i_k$$

$$\frac{d}{dt}\bar v_r = \underbrace{\ddot y_1 \bar j_1 + \ddot y_2 \bar j_2 + \ddot y_3 \bar j_3}_{\bar a_r} + \dot y_1 \frac{d}{dt}\bar j_1 + \dot y_2 \frac{d}{dt}\bar j_2 + \dot y_3 \frac{d}{dt}\bar j_3$$

$$+ \bar\omega \times \underbrace{\sum_{k=1}^{3} \dot y_k \bar j_k}_{\bar v_r}$$

$$\frac{d}{dt}\bar v_\tau = \bar a_{O'} + \underbrace{\sum_k \dot y_k \underbrace{\frac{d}{dt} J_k}_{\bar\omega\times\bar J_k}}_{\bar\omega\times\bar v_r} + \sum y_k \frac{d^2}{dt}\bar J_k$$

$$\frac{d}{dt}\left(\bar\omega\times(P-O')\right)$$

$$\dot{\bar\omega}\times(P-O') + \bar\omega\times\underbrace{\frac{d}{dt}(P-O')}_{\bar\omega\times(P-O')}$$

$$= \bar a_{O'} + \bar\omega\times\bar v_r + \dot{\bar\omega}\times(P-O') + \bar\omega\times[\bar\omega\times(P-O')]$$

$$\Rightarrow \bar a_a = \bar a_r + \underbrace{2\bar\omega\times\bar v_r}_{\bar a_c} + \underbrace{\bar a_{O'} + \dot{\bar\omega}\times(P-O') + \bar\omega\times[\bar\omega\times(P-O')]}_{\bar a_\tau}$$

Dim: Derivando rispetto a t $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_\tau$ otteniamo
(*)

$$\bar{a}_a = \underbrace{\ddot{y}_1 \bar{J}_1 + \ddot{y}_2 \bar{J}_2 + \ddot{y}_3 \bar{J}_3} + 2\underbrace{\left(\dot{y}_1 \frac{d}{dt}\bar{J}_1 + \dot{y}_2 \frac{d}{dt}\bar{J}_2 + \dot{y}_3 \frac{d}{dt}\bar{J}_3\right)}$$

$$\underbrace{\bar{a}_0 + y_1 \frac{d^2}{dt^2}\bar{J}_1 + y_2 \frac{d^2}{dt^2}\bar{J}_2 + y_3 \frac{d^2}{dt^2}\bar{J}_3}$$

$$= \bar{a}_r + 2(\dot{y}_1 \bar{\omega} \times \bar{J}_1 + \dot{y}_2 \bar{\omega} \times \bar{J}_2 + \dot{y}_3 \bar{\omega} \times \bar{J}_3) + \bar{a}_\tau$$

$$= \bar{a}_r + \bar{a}_\tau + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = \bar{a}_r + \bar{a}_\tau + \bar{a}_c$$

Spesso il moto del rif. mobile rispetto a quello fisso viene chiamato moto di trascinamento.

Def. Chiamiamo moto di trascinamento traslatorio il moto in cui il rif. mobile si muove di moto di traslazione rispetto al rif. fisso.

In un moto di trascinamento traslatorio, tutti i punti solidali con il rif. mobile hanno la stessa velocità e accelerazione e quindi è possibile scegliere come $\bar{v}_\tau$ ed $\bar{a}_\tau$ di ogni punto quelle del punto o' (origine del rif. mobile).

$$\boxed{\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_{o'}}$$ TEOREMA DI GALILEO

Poiché i versori del rif. mobile sono costanti in direzione, dalle formule di Poisson:

$$\bar{\omega} = \bar{0} \quad \text{(vettore nullo)}$$

e quindi l'accelerazione di Coriolis:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r \equiv \bar{0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_{o'}}$$ TEOREMA DI RIVALS

Se il moto di trascinamento traslatorio è rettilineo ed uniforme allora $\bar{a}_{O'} = \bar{0}$ e quindi:

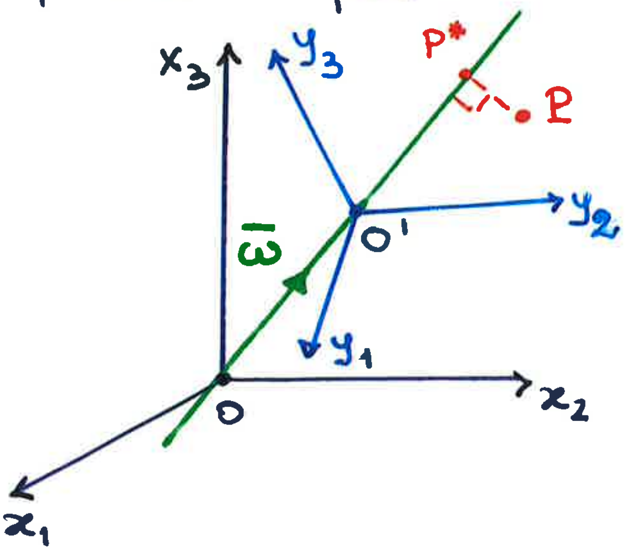
$$\boxed{\bar{a}_a = \bar{a}_r}$$

cioè l'accelerazione è la stessa rispetto ai due osservatori.

Def: Due osservatori si dicono equivalenti se i relativi sistemi di riferimento si muovono l'uno rispetto all'altro di moto di traslazione rettilinea ed uniforme.

Osservazione: La velocità ha sempre carattere relativo; l'accelerazione ha carattere relativo, ma risulta invariante nella classe dei sistemi equivalenti (equivalenza galileiana).

Def: Chiamiamo moto di trascinamento rotatorio uniforme un moto in cui il rif. mobile ruota uniformemente ($\bar{\omega}$ = costante) attorno ad una retta fissa passante per O.



$\dot{\bar{\omega}} = \bar{0}$

$\bar{v}_\tau = \bar{\omega} \times (P-O)$

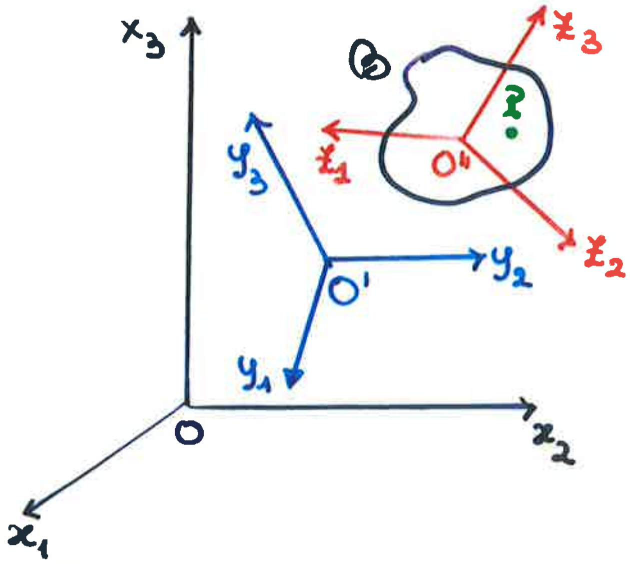
$\bar{a}_\tau = -\omega^2 (P-P^*) = \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (P-O)]$

perciò:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{\omega} \times (P-O)$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r - \omega^2 (P-P^*) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$$

MOTI RELATIVI PER CORPI RIGIDI



$\mathcal{B}$: corpo rigido

$Ox_1x_2x_3$: rif. fisso

$O'y_1y_2y_3$: rif. mobile

$O''z_1z_2z_3$: rif. solidale con $\mathcal{B}$ (ortog. destro)

Def: Chiamiamo velocità angolare assoluta $\bar{\omega}_a$ la velocità angolare di $\mathcal{B}$ nel suo moto (assoluto) rispetto ad $Ox_1x_2x_3$. Per ogni $P \in \mathcal{B}$ si ha:

$$\bar{v}_a(P(t)) = \bar{v}_a(O''(t)) + \bar{\omega}_a(t) \times (P - O'')$$

Chiamiamo velocità angolare relativa $\bar{\omega}_r$ la velocità angolare di $\mathcal{B}$ nel suo moto (relativo) rispetto ad $O'y_1y_2y_3$. Per ogni $P \in \mathcal{B}$ si ha:

$$\bar{v}_r(P(t)) = \bar{v}_r(O''(t)) + \bar{\omega}_r(t) \times (P - O'')$$

Chiamiamo velocità angolare di trascinamento $\bar{\omega}_\tau$ la velocità angolare di $\mathcal{B}$ ~~nel~~ pensato rigidamente collegato col sistema mobile $O'y_1y_2y_3$. Per ogni $P \in \mathcal{B}$ si ha:

$$\bar{v}_\tau(P(t)) = \bar{v}_\tau(O''(t)) + \bar{\omega}_\tau(t) \times (P - O'')$$

dove $\bar{v}_a(P)$, $\bar{v}_a(O'')$ sono le velocità di P ed O'' in $Ox_1x_2x_3$
$\bar{v}_r(P)$, $\bar{v}_r(O'')$ " " " " " " " " $O'y_1y_2y_3$
$\bar{v}_\tau(P)$, $\bar{v}_\tau(O'')$ " " " di trascinamento di P e O''

Teorema di composizione delle velocità angolari

La velocità angolare assoluta di un sistema rigido è data, in ogni istante, dalla somma delle velocità angolari relativa e di trascinamento, cioè:

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_\tau$$

Dim: In base alla definizione di velocità assoluta, relativa e di trascinamento e per il teorema di composizione delle velocità, si ha:

$$\bar{v}_a(P) = \bar{v}_r(P) + \bar{v}_\tau(P) \quad , \quad \forall P \in \mathcal{B}$$

$$\bar{v}_a(O'') = \bar{v}_r(O'') + \bar{v}_\tau(O'')$$

Sottraendo membro a membro le espressioni delle velocità assoluta, relativa e di trascinamento delle definizioni date:

$$\underbrace{\bar{v}_a(P) - \bar{v}_r(P) - \bar{v}_\tau(P)}_{=\bar{0}} = \overbrace{\bar{v}_a(O'') - \bar{v}_r(O'') - \bar{v}_\tau(O'')}^{=\bar{0}} + (\bar{\omega}_a - \bar{\omega}_r - \bar{\omega}_\tau)\times(P-O'')$$

per ogni $P \in \mathcal{B}$ si ottiene:

$$(\bar{\omega}_a - \bar{\omega}_r - \bar{\omega}_\tau)\times(P-O'') = \bar{0}$$

perciò

$$\bar{\omega}_a - \bar{\omega}_r - \bar{\omega}_\tau = \bar{0}.$$