DIAGRAMMA DI FASE

Per una descrizione qualitativa del moto di un sistema retto da:

$$\frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V(s) = E \qquad (*)$$

è utile costruire il diagramma di fase, cioè il grafico, al variare di E, delle funzioni:

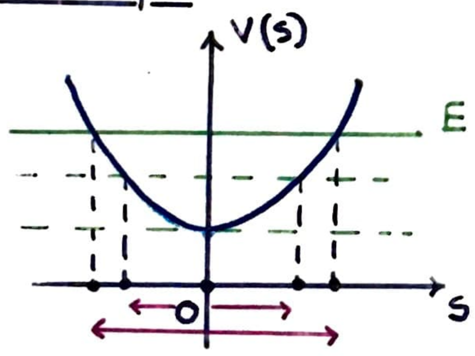
$$\dot{s} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(s)\right]}$$

nel piano $(s, \dot{s})$ detto SPAZIO DELLE FASI.

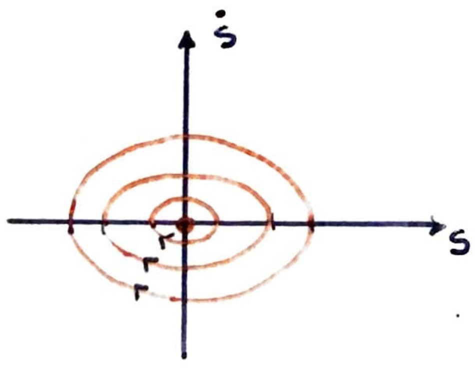
Il diagramma di fase è costituito da una famiglia di curve, ognuna corrispondente ad un valore dell'energia totale E e lo si utilizza quando la (*) è di difficile risoluzione.

Esempi

1)



$s=0$ punto di MINIMO per V e di massima velocità

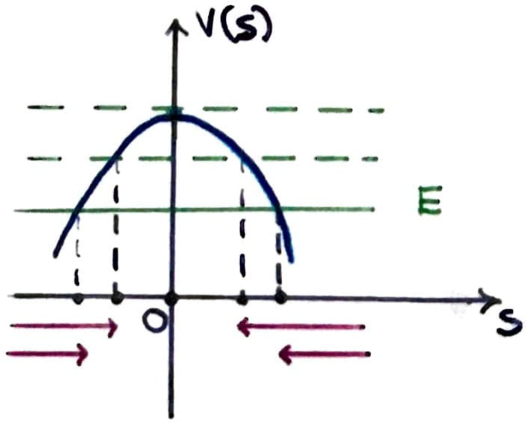


curve chiuse attorno ~~[illegible]~~ ad $s=0$

MOTO OSCILLATORIO

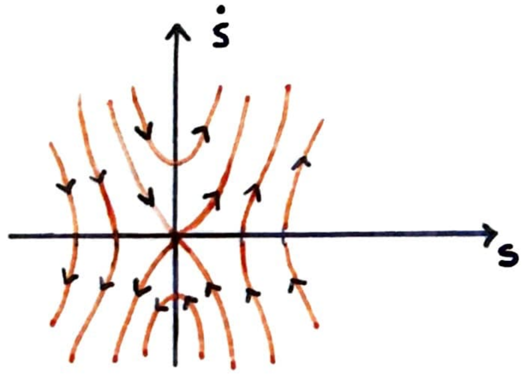
$s=0$ CENTRO

2)



$\underline{s=0}$ punto di MASSIMO per V

e di minima velocità

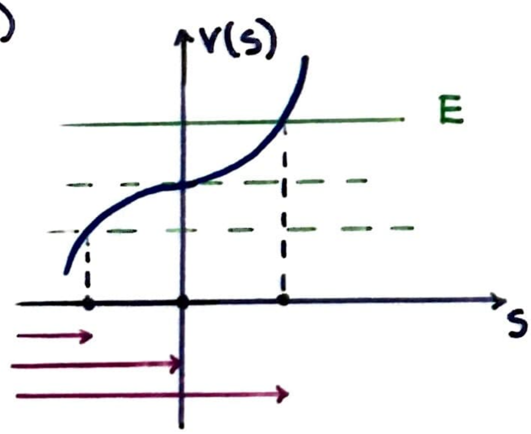


$\underline{s=0}$ punto ISOLATO

MOTO ASINTOTICO

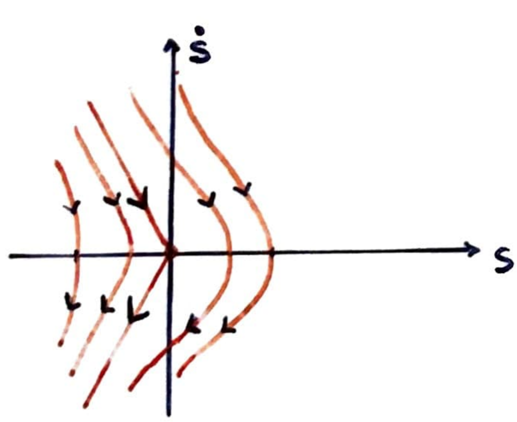
s=0 PUNTO A SELLA

3)



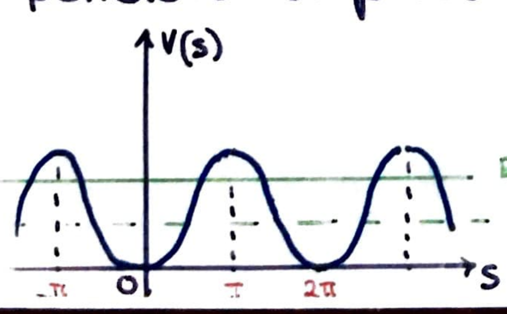
$\underline{s=0}$ punto di FLESSO per V

a tangente orizzontale

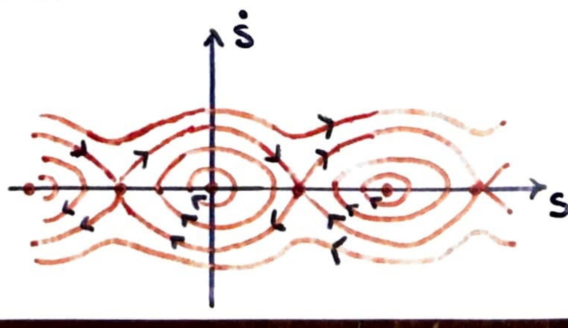


s=0 INFLESSIONE A CUSPIDE

4) pendolo semplice $V = mgl(1-\cos\theta)$



$\Rightarrow$



Tale metodo risulta significativo nello studio delle proprietà di stabilità dell'equilibrio.

Consideriamo sistemi conservativi ad 1 g. di libertà retti dall'equazione:

$$m\ddot{s} = \mathcal{F}(s, \dot{s}, t)$$

$s = s_e$ è di equilibrio sse

$$\mathcal{F}(s_e, 0, t) = 0$$

e poiché il sistema è conservativo $\exists\, \mathcal{U}$ potenziale $\mathcal{F} = \nabla \mathcal{U}$.

$$\mathcal{F}(s_e, 0, t) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial s}\right|_{s=s_e} = 0$$

essendo $V = -\mathcal{U}$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial s}\right|_{s=s_e} = 0$$ condizione di equilibrio

Associato all'equilibrio sussiste il problema della stabilità. Una posizione di eq. s_e è detta STABILE se una perturbazione (di s e $\dot{s}$) abbastanza piccola provoca un moto che si mantiene prossimo ad s_e con una velocità comunque piccola. Se ciò non avviene s_e è detta di eq. INSTABILE.

Studiamo il diagramma di fase nell'intorno di s_e:

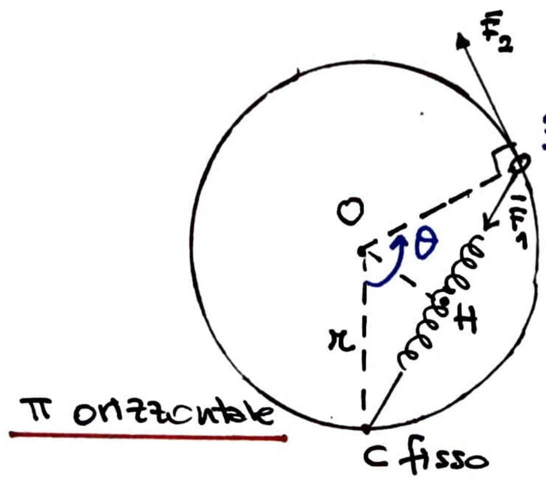
1) s_e è un minimo per V $\Rightarrow$ CENTRO eq. STABILE
2) s_e è un massimo per V $\Rightarrow$ PTO SELLA eq. INSTABILE
3) s_e è un flesso per V $\Rightarrow$ INFLESSIONE A CUSPIDE eq. INSTABILE

$V = V(s)$ $\qquad \left.\frac{\partial V}{\partial s}\right|_{s=s_e} = 0$ $\qquad s_e$: posizione di equilibrio

Si considera $\boxed{\text{stabile}}$ uno stato di equilibrio $(s_e, 0)$ se comunque si scelga un intorno $I_\varepsilon(s_e)$, nello spazio delle Fasi, dello stato $(s_e, 0)$, è sempre possibile trovare in corrispondenza ad esso un altro intorno $I_\delta(s_e)$ di tale stato, tale che se inizialmente la posizione e la velocità appartengono all'intorno $I_\delta(s_e)$, allora il corrispondente moto rimarrà all'interno di $I_\varepsilon(s_e)$.

Quando questo non avviene la posizione di equilibrio è detta instabile.

Esercizio (pag. 113 libro di testo)



$(P, m) \in \mathcal{C}$

$\vec{F}_1 = -k(P-C)$

$\vec{F}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} k r \vec{t}$

$q = \theta \in [0, 2\pi)$

$\widehat{PC} = s = r\theta$

Forze conservative $dU = dL$

$dL = \bar{F}_1 \cdot dP + \bar{F}_2 \cdot dP$ dove $dP = \bar{v}_P dt = r\dot{\theta}\vec{t} dt = r d\theta \vec{t}$

$\bar{F}_2 \cdot dP = \frac{\sqrt{3}}{2} k r \vec{t} \cdot r d\theta \vec{t} = \frac{\sqrt{3}}{2} k r^2 d\theta$

$\bar{F}_1 = -k(P-C)$ dove $|P-C| = 2\overline{PH} = 2r\sin\frac{\theta}{2}$ (OCP isoscele)

detto $\vec{h}$ versore di $(C-P)$

$\bar{F}_1 \cdot dP = k|P-C| \vec{h} \cdot r\dot{\theta}\vec{t} dt = 2kr^2 \sin\frac{\theta}{2} d\theta (\vec{h} \cdot \vec{t})$

Detto α angolo tra $\vec{h}$ e $\vec{t}$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \pi - \frac{\theta}{2}$ $\cos\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) = -\cos\frac{\theta}{2}$

quindi

$\bar{F}_1 \cdot dP = 2kr^2 \sin\frac{\theta}{2}\left(-\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -kr^2 \sin\theta \, d\theta$

$\Rightarrow dU = \left(-kr^2\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}kr^2\right) d\theta$

$U = \int dU = kr^2 \int -\sin\theta \, d\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} kr^2 \int d\theta + c$

$= kr^2\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}kr^2\theta + c$

$\Rightarrow V = -kr^2\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}kr^2\theta + c$

$V' = kr^2 \sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2} k r^2$ $\qquad V' = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

cioè $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = \frac{2}{3}\pi$

$V'' = kr^2 \cos\theta$

$V''\big|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \frac{kr^2}{2} > 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ è un minimo STABILE

$V''\big|_{\theta=\frac{2}{3}\pi} = -\frac{kr^2}{2} < 0 \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi$ è un massimo. INSTABILE

Per $\theta = \frac{\pi}{3}$ $\qquad V\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{kr^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} k r \pi$

per $\theta = \frac{2}{3}\pi$ $\qquad V\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{kr^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} k r \pi$

per $\theta = 0$ $\qquad V(0) = -kr^2$

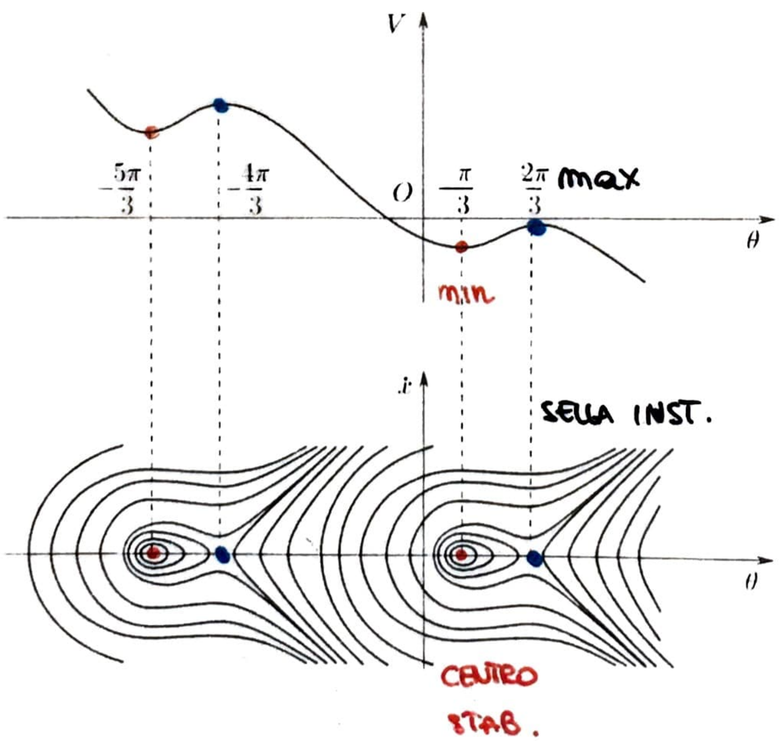
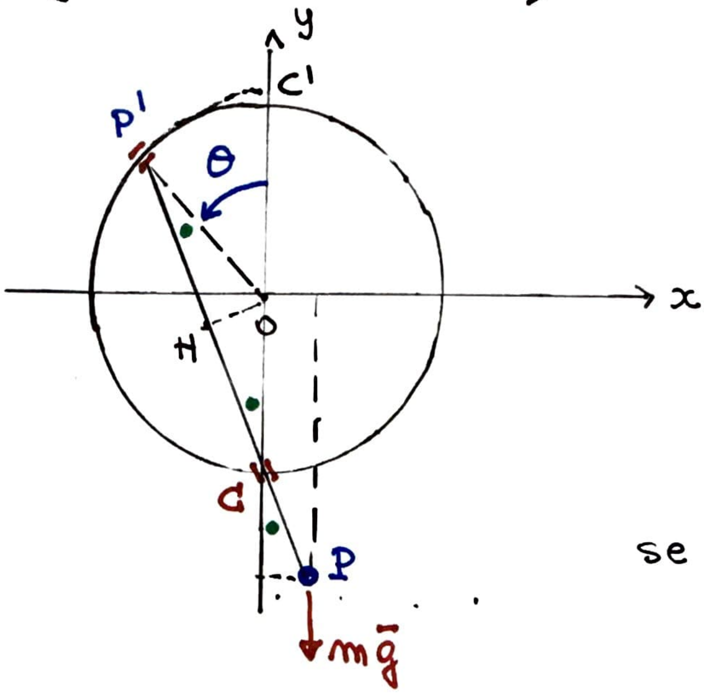


Figura 2.32

Esercizio (pag. 115 libro di testo)

Π verticale



- Asta PP' di massa trascurabile $PP' = l$
- (P, m)

$q = P'\hat{O}C' = \theta \in [0, 2\pi)$

$\overline{OC'} = 2r$

se $l = \alpha r$ $\quad \alpha > 0$

$\alpha r > 4r \Rightarrow \boxed{\alpha > 4}$

θ angolo al centro che insiste su $\widehat{P'C'}$

$\bullet = P'\hat{C}C'$ angolo alla circonferenza che insiste su $\widehat{P'C'} = \frac{\theta}{2}$

$$\mathcal{U} = -mg\, y_P + c$$

$$y_P = -\left[\overline{OC} + \overline{CP}\cos\frac{\theta}{2}\right] \quad \text{dove } \overline{CP} = \overline{PP'} - \overline{P'C}$$

$$= \alpha r - 2\,\overline{P'H}$$

$$= \alpha r - 2\cdot\left(2r\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= -\left[2r + \cos\frac{\theta}{2}\left(\alpha r - 4r\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$= -2r - \alpha r\cos\frac{\theta}{2} + 4r\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\mathcal{U} = mg\,\alpha r\cos\frac{\theta}{2} - mg\,4r\cos^2\frac{\theta}{2} + c$$

$$V = 4mgr\cos^2\frac{\theta}{2} - \alpha mgr\cos\frac{\theta}{2} + c$$

$$V' = 8mgr\cos\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha mgr\sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -4mgr\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\alpha mgr\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= mgr\sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{\alpha}{2} - 4\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$V' = 0 \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = 0 \qquad \frac{\theta}{2} = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \frac{\theta}{2} = \pi \Rightarrow \theta = 2\pi$

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{8} > 0 \qquad \bar{\theta} = 2\arccos\left(\frac{\alpha}{8}\right) \Rightarrow \theta_1 = \bar{\theta}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \theta_2 = -\bar{\theta}$

con $\frac{\alpha}{8} \leq 1 \Rightarrow \boxed{\alpha \leq 8}$

$$V'' = -4mgr\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2} + 4mgr\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha mgr\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= -2mgr\cos^2\frac{\theta}{2} + 2mgr\underbrace{\sin^2\frac{\theta}{2}}_{(1-\cos^2\frac{\theta}{2})} + \frac{1}{4}\alpha mgr\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 2mgr\left(1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4}\alpha mgr\cos\frac{\theta}{2}$$

$$V''\big|_{\theta=0} = -2mgr + \frac{\alpha}{4}mgr = 2mgr\left(-1 + \frac{\alpha}{8}\right)$$

$V''(0) < 0$ se $\frac{\alpha}{8} - 1 < 0 \Rightarrow \alpha < 8$

$\Rightarrow 4 < \alpha < 8$ NON E' $\theta = 0$ STABILE

se $\frac{\alpha}{8} - 1 > 0 \Rightarrow \underline{\alpha > 8}$ $\theta = 0$ E' STABILE

se $\alpha = 8$?

$$V''(\pm\bar{\theta}) = 2mgr\left(1 - \cancel{2}\cdot\frac{\alpha^2}{\cancel{64}_{32}}\right) + \frac{1}{4}\alpha mgr\cdot\frac{\alpha}{8}$$

$$= 2mgr\left(1 - \frac{\alpha^2}{64}\right) = 2mgr\left(1 - \frac{\alpha}{8}\right)\underbrace{\left(1 + \frac{\alpha}{8}\right)}_{+}$$

$V''(\pm\bar{\theta}) > 0$ se $1 - \frac{\alpha}{8} > 0 \Rightarrow \alpha < 8$

$\Rightarrow 4 < \alpha < 8$ $\theta = \pm\bar{\theta}$ SONO STABILI

se $1 - \frac{\alpha}{8} < 0 \Rightarrow \alpha > 8$ $\theta = \pm\bar{\theta}$ SONO INSTABILI

NO NON ESISTONO

se $\alpha = 8$?

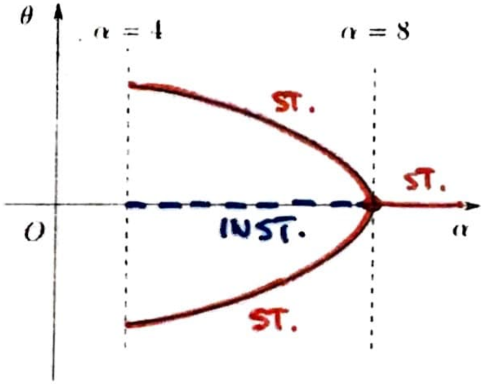


Figura 2.34

Inoltre i diagrammi di fase relativi alle due situazioni sono ben descritti nelle figure 2.35 a, b, in cui si individua la *biforcazione* che si genera allorquando α passa da valori maggiori a valori inferiori ad 8.

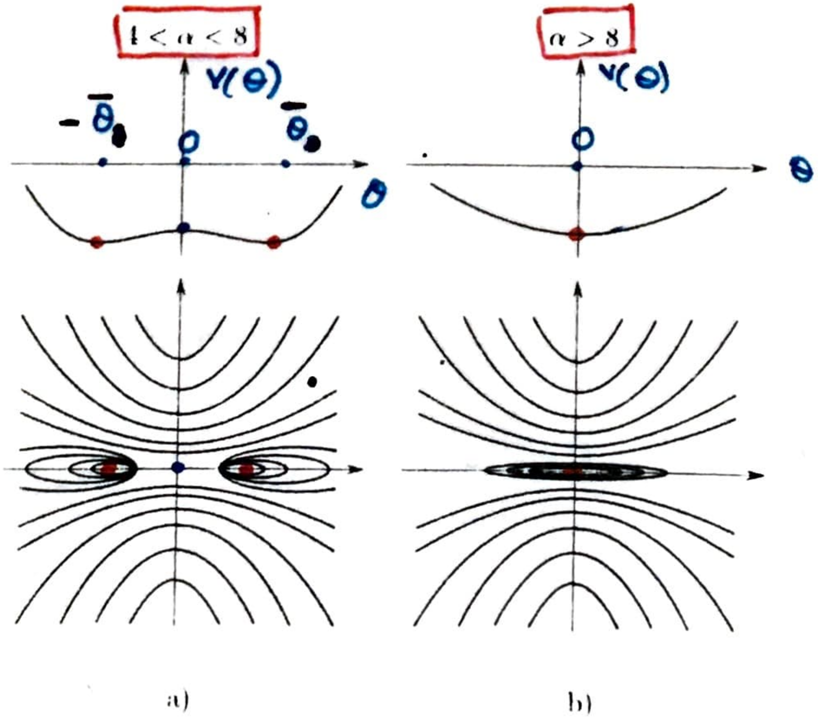


Figura 2.35