STABILITÀ

Il concetto di stabilità è legato all'idea che una "piccola" perturbazione su una configurazione di equilibrio stabile non sia in grado, $\forall t \geq 0$ di allontanare "troppo" il sistema da tale posizione.

Def.: Dato un sistema meccanico definiamo la coppia

$$y = (x, \dot{x})$$

lo STATO DINAMICO del sistema, dove

$x = (x_1, \dots, x_m)$ posizione

$\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m)$ atto di moto

m = grado di libertà

Poiché è possibile trasformare un'equazione differenziale del 2° ordine in un sistema di 2 equazioni differenziali del 1° ordine, l'evoluzione del sistema è retto da:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = v(t) \\ \frac{d}{dt} v(t) = \tilde{G}(x(t), \dot{x}(t), f(t)) \end{cases}$$

o in modo compatto

$$\dot{y}(t) = \hat{G}(y(t), t) \qquad \hat{G} = \begin{pmatrix} v \\ \tilde{G} \end{pmatrix}$$

Y: spazio delle fasi o degli stati

Dovendo studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio il sistema deve essere a vincoli fissi e quindi consideriamo sistemi per i quali $G = \hat{G}(y)$ detti autonomi.

Def.: Uno stato $y_e = (x_e, 0)$ è detto di equilibrio per il sistema dinamico se il moto $y(t, y_e)$ con y_e come stato iniziale è dato da:

$$y(t, y_e) = y_e$$

cioè la quiete.

Def: STABILITÀ SECONDO LYAPUNOV

Uno stato di equilibrio $y_e \in Y$ è detto STABILE se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \| y_0 - y_e \| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \| y(t) - y_e \| < \varepsilon$$

dove $y(t) = y(t, y_0)$.

Def: Ogni posizione di equilibrio che non risulta stabile nel senso di Lyapunov è detto INSTABILE.

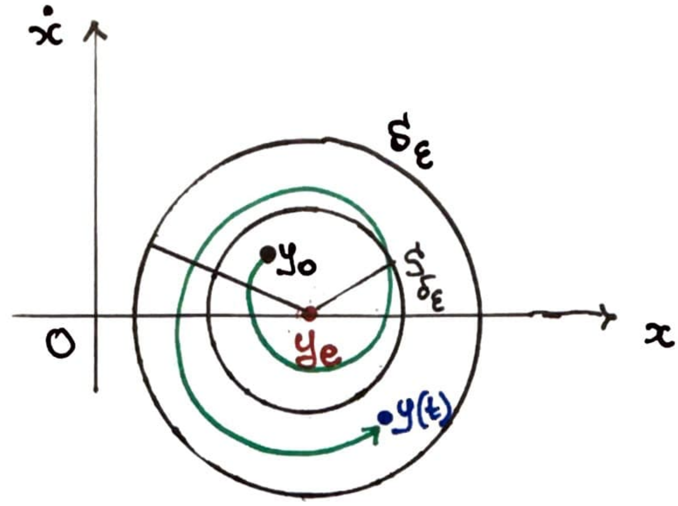
Possiamo ragionare anche con gli intorni. Indicati

$$S_\varepsilon(y_e) = \{ y \in Y : \| y(t) - y_e \| < \varepsilon \}$$

$$S_{\delta_\varepsilon}(y_e) = \{ y \in Y : \| y(t) - y_e \| < \delta_\varepsilon \}$$

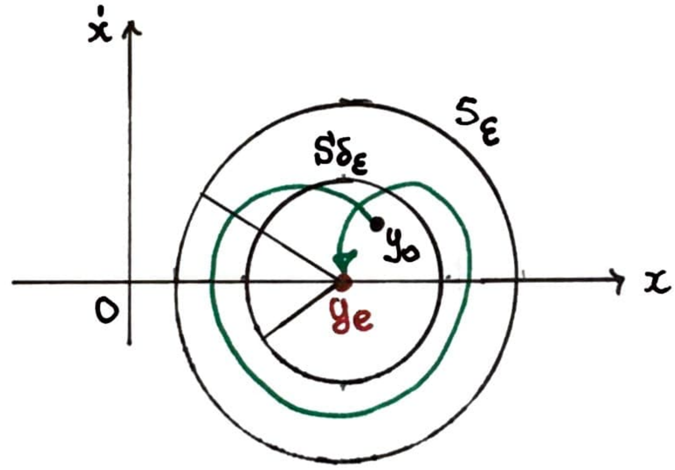
la def. di stabilità si traduce:

$$\text{se } y_0 \in S_{\delta_\varepsilon}(y_e) \Rightarrow y(t) \in S_\varepsilon(y_e), \quad \forall t \geq 0.$$



Def: Uno stato di equilibrio $y_e \in Y$ è detto ASINTOTICAMENTE STABILE se:

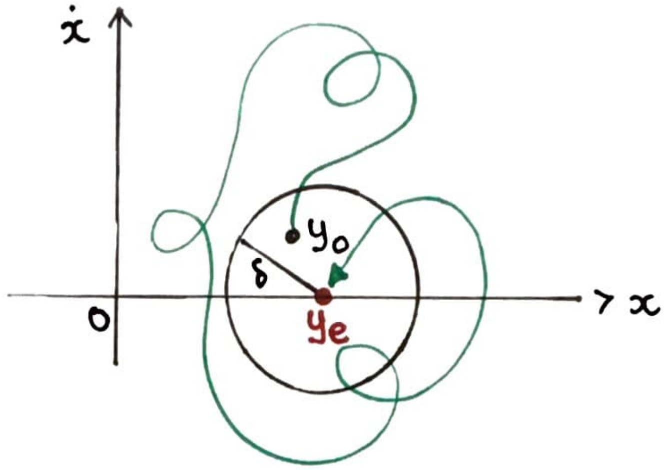
1) y_e è stabile
2) $\lim_{t \to \infty} \| y(t) - y_e \| = 0$



la stabilità asintotica $\Rightarrow$ la stabilità
$\nLeftarrow$

Def: Uno stato di equilibrio $y_e \in Y$ è detto ATTRATTORE se $\exists\, \delta > 0$:

$$\forall\, y_0 : \| y_0 - y_e \| < \delta \Rightarrow y(t) = (t, y_0) : \lim_{t \to \infty} \| y(t) - y_e \| = 0$$



attrattore $\not\Rightarrow$ stabilità
$\not\Leftarrow$

Esistono dei teoremi per stabilire se una posizione di equilibrio è stabile o è un attrattore.
Il PRIMO TEOREMA DI LYAPUNOV stabilisce un criterio con cui individuare gli attrattori di un sistema dinamico (non si fa)
Il SECONDO TEOREMA DI LYAPUNOV è un criterio che consente di stabilire una CONDIZIONE SUFFICIENTE per la stabilità attraverso un'analisi qualitativa del sistema.

TEOREMA : Uno stato di equilibrio $y_e \in Y$ è stabile (secondo Lyapunov) se esiste in un intorno di y_e $I(y_e)$ una funzione di Lyapunov W.
(senza dimostrazione).

Vediamo ora la definizione di funzione di Lyapunov.

Def: Una funzione $W: Y \to \mathbb{R}$ è detta funzione di Lyapunov in un intorno $I(y_e)$ dello stato di equilibrio y_e se:

1) W è continua in $I(y_e)$

   è differenziabile su $I(y_e) \setminus \{y_e\}$

2) W ha un minimo locale in $y_e \Rightarrow$

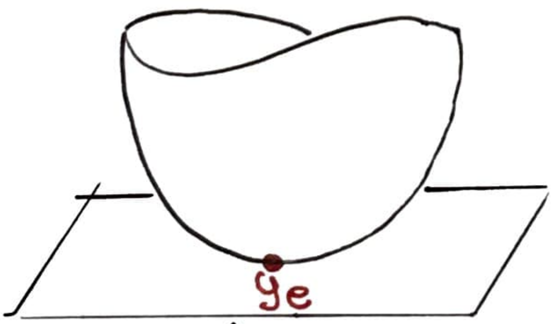
   $W(y_e) = 0 \ , \ W(y) > 0$ se $y \neq y_e$

3) W è monotona non crescente su ogni soluzione $y(t, y_0)$ con $y_0 \neq y_e \in I(y_e)$, cioè:

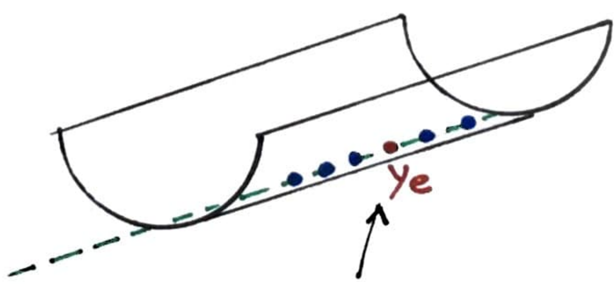
$$\dot{W}(y(t), y_0) \leq 0 \ , \ \forall t \geq 0$$

- se $\dot{W}(y(t), y_0) < 0$, $\forall t > 0$ allora W è detta di Lyapunov in senso stretto (monotona decrescente)

TEOREMA: Uno stato $y_e \in Y$ è asintoticamente stabile se esiste una funzione di Lyapunov in senso stretto in un intorno $I(y_e)$ di y_e.



è minimo locale



non è minimo locale

Per molti sistemi meccanici $W \equiv E$ energia meccanica totale.

TEOREMA DI DIRICHLET

Per un sistema meccanico a vincoli fissi, olonomi, bilaterali, soggetto a forze conservative con energia potenziale V ed eventualmente a forze dissipative, una posizione di equilibrio q_e è stabile se V presenta in q_e un minimo locale.

<u>Dim</u>:

Dal teorema delle forze vive:

$$dT = dL = dL^c + dL^d + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{dL^v} = dU + \underset{\leq 0}{dL^d} = -\underset{\overset{\uparrow}{V=-U}}{dV} + dL^d \leq -dV$$

$$\frac{d}{dt} W \doteq \frac{d}{dt}(T+V) \leq 0$$

$$W(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) + V(q)$$

Supponiamo che $q_e = 0$. Se così non è basta porre $\bar{q}(t) = q(t) - q_e \Rightarrow \bar{q}_e \equiv 0$.

Poiché $V\ (=-U)$ è definita a meno di una costante

$$V(q) = f(q) + c$$

da $\frac{\partial V}{\partial q} = 0$ ottengo $q = q_e$

$$V(q_e) = f(q_e) + c$$

E' possibile scegliere la costante c in modo tale che in q_e

$$V(q_e) = f(q_e) + c = 0$$

(basta che $c = -f(q_e)$)

e allora si può supporre, senza perdere in generalità che $q_e = 0$. e $V(q_e) = V(0) = 0$.

$$W = T + V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + V(q_1, \dots, q_m)$$

In $q_e = 0$ $\dot{q} = 0$ e

$$W(q_e) = \underset{\overset{|||}{0}}{T(q_e)} + \underset{\overset{||}{0}}{V(q_e)} = 0$$

$\Rightarrow$ $W(q_e)$ ha un minimo locale in $q_e = 0$ se V ha un minimo locale in $q_e = 0$.

$\Rightarrow$ W è di Lyapunov.

TEOREMA : Per un sistema meccanico a vincoli fissi e bilaterali soggetto a forze conservative sono posizioni di equilibrio INSTABILE quelle per cui l'energia potenziale V NON presenta un minimo locale e tale assenza di minimo è riconoscibile dall'esame locale delle derivate seconde dell'energia potenziale.

PICCOLE OSCILLAZIONI

Dato un sistema lagrangiano a vincoli fissi con n gradi libertà si ha

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$V = V(q)$$

Ogni configurazione di equilibrio interna (ordinaria) definita da $q_e = (q_{1e}, .., q_{ne})$ è tale che:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q=q_e} = 0 \qquad i = 1, .., n$$

È sempre possibile supporre che $q_e = (0, .., 0) = 0$ e che $V(q_e) = V(0) = 0$ (vedi th. di Dirichlet)

Vogliamo ora studiare i piccoli moti attorno alla posizione di equilibrio stabile $q_e = 0$.

Ricordando lo sviluppo in serie di MacLaurin di una funzione f cioè

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

sviluppiamo in serie i coefficienti a_{ij} e V.

$a_{ij}(q_e) = a_{ij}(0) = a_{ij}$ costanti

$$T_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$V_a = \underbrace{V(0)}_{=0} + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_e=0}}_{=0} q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \underbrace{\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_e=0}}_{= c_{ij} \text{ costanti}} q_i q_j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij} q_i q_j$$

cioè T_a, V_a sono due forme quadratiche omogenee nelle $\dot{q}$ e nelle q rispettivamente:

a) $a_{ij} = a_{ji}$, $c_{ij} = c_{ji}$ simmetria

b) $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} u_i u_j > 0$, $\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij} u_i u_j > 0$ definite positive

$\forall u = (u_1, \dots, u_m) \neq 0$

La lagrangiana approssimata sarà:

$$\mathcal{L}_a = T_a + U_a = T_a - V_a = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \left(a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - c_{ij} q_i q_j \right)$$

mentre le equazioni di Lagrange attorno a $q_e = 0$ stabile implicano

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \ddot{q}_j + c_{ij} q_j = 0 \qquad i = 1, \dots, m \qquad (1)$$

(1) è un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti le cui soluzioni sono del tipo:

$$q_i = \alpha_i e^{pt+\beta} \qquad i = 1, \dots, m \qquad \alpha_i, p \in \mathbb{C}.$$

Poichè $\dot{q}_i = \alpha_i p e^{pt+\beta}$

$\ddot{q}_i = \alpha_i p^2 e^{pt+\beta}$

sostituendolo in (1) otteniamo.

$$e^{pt+\beta} \sum_{J=1}^{m} a_{iJ} \alpha_i p^2 + c_{iJ} \alpha_i = 0 \quad i=1,..n$$

cioè

$$\sum_{J=1}^{m} \alpha_i \left(a_{iJ} p^2 + c_{iJ} \right) = 0 \quad i=1,..,n$$

Vediamo se esistono soluzioni rappresentate da oscillazioni armoniche per le quali $p = i\omega$.

$$\sum_{J=1}^{m} \left(c_{iJ} - \omega^2 a_{iJ} \right) \alpha_i = 0 \quad i=1,..,m \tag{2}$$

Poiché (2) è un sistema lineare omogeneo, perché ammetta soluzione non banale il determinante dei coefficienti deve essere nullo

$$\boxed{\det \left[c_{iJ} - \omega^2 a_{iJ} \right] = 0} \quad \text{EQUAZIONE SECOLARE} \tag{3}$$

Per le ipotesi a), b) (3) presenta m radici reali e quindi (1) ha soluzioni armoniche del tipo

$$q_i = \alpha_{ih} \sin\left(\omega_h t + \beta_h \right) \quad h = 1,..,m$$

chiamate oscillazioni principali.

ω_h sono le pulsazioni principali

$f_h = \frac{\omega_h}{2\pi}$ sono le frequenze principali, la più piccola delle quali è detta moto fondamentale, le altre armoniche successive.

SCHEMA DI RISOLUZIONE PER STABILITA' E PICCOLE OSCILLAZIONI

① sistemi ad 1 grado di libertà

$\mathcal{U} = \mathcal{U}(q)$

$\frac{dU}{dq} = 0 \Rightarrow q = q_e$ p. di equilibrio

$$\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_e} = \begin{cases} <0 & a) \\ >0 & b) \\ =0 & c) \end{cases}$$

a) q_e è un max per U (min per V) $\Rightarrow$ È STABILE

b) q_e è un min per $\mathcal{U}$ (max per V) $\Rightarrow$ È INSTABILE

c) ? $\Rightarrow$ devo calcolare derivata 3ª:

$$\left.\frac{d^3U}{dq^3}\right|_{q=q_e} = \begin{cases} \neq 0 \Rightarrow q_e \text{ è un flesso} \Rightarrow \text{È INSTABILE} \\ = 0 \quad ? \text{ devo calcolare derivata } 4^a \\ \quad\quad \text{che si comporta come der. } 2^a. \end{cases}$$

Sia q_e p. di eq. stabile

$\mathcal{L}_a = T_a + \mathcal{U}_a$ dove

$T_a = T(q_e) = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}^2 \qquad a_{11} = a_{11}(q_e)$

$\mathcal{U}_a = \frac{1}{2} u_{11} (q - q_e)^2 \qquad u_{11} = \left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_e}$

dall' eq. di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial q} = 0$$

ottengo

$$a_{11}\ddot{q} - u_{11} q = -u_{11} q_e$$

poiché $u_{11} = -c_{11}$

$$\ddot{q} + \frac{c_{11}}{a_{11}} q = \frac{c_{11}}{a_{11}} q_e$$

$\frac{c_{11}}{a_{11}} = \omega^2$ pulsazione delle piccole oscillazioni

② sistemi a 2 gradi di libertà

$U = U(q_1, q_2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow q_e = (q_{1e}, q_{2e}) \text{ p. di equilibrio}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right|_{q=q_e} = u_{11} \\ &\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right|_{q_e} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1}\right|_{q_e} = u_{12} \\ &\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right|_{q_e} = u_{22} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{H} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{bmatrix}$$

matrice hessiana

q_e è p. di eq. stabile se:

$$\begin{cases} u_{11} < 0 \\ \det \mathcal{H} = u_{11} u_{22} - u_{12}^2 > 0 \end{cases}$$

- se $u_{12} = 0 \Rightarrow u_{22} < 0$.

Sia q_e p. di eq. stabile

Per determinare le pulsazioni delle piccole oscillazioni scrivo $\mathcal{L}_a = T_a + U_a$ dove:

$$T_a = \frac{1}{2}\left[a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right]$$

con $a_{ij} = a_{ij}(q_e)$

$$U_a = \frac{1}{2}\left[u_{11}(q_1-q_{1e})^2 + 2u_{12}(q_1-q_{1e})(q_2-q_{2e}) + u_{22}(q_2-q_{2e})^2\right]$$

e l'equazione secolare

$$\begin{vmatrix} a_{11}\omega^2 + u_{11} & a_{12}\omega^2 + u_{12} \\ a_{12}\omega^2 + u_{12} & a_{22}\omega^2 + u_{22} \end{vmatrix} = 0$$

che risulta essere una biquadratica del tipo

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0$$

posto $\omega^2 = t > 0$

$$At^2 + Bt + C = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

da cui ricavo ω_1^2, ω_2^2 cioè le pulsazioni.

- se $a_{12} = u_{12} = 0$ le eq. di Lagrange approssimate sono disaccoppiate e

$$\begin{cases} \omega_1^2 = -\dfrac{u_{11}}{a_{11}} = \dfrac{c_{11}}{a_{11}} > 0 \\ \omega_2^2 = -\dfrac{u_{22}}{a_{22}} = \dfrac{c_{22}}{a_{22}} > 0 \end{cases}$$

pulsazioni delle piccole oscillazioni