Probabilità e Statistica
Esercitazioni

a.a. 2009/2010

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica

Variabili casuali multidimensionali

Ines Campa

Esercizio 1. Due fabbriche diverse producono lo stesso componente per macchinari. I pezzi vengono classificati in base alla fabbrica che li ha prodotti e ai loro difetti. Sia X il numero della fabbrica (1 o 2) e Y il numero dei difetti per pezzo (0,1, 2 o 3) di un pezzo scelto a caso tra la totalità di quelli esistenti. La tabella seguente riporta la funzione di densità di probabilità congiunta delle variabili casuali discrete X e Y, nell'ipotesi che altrove valga 0.

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$
$X=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$
$X=2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

a) Determinare le distribuzioni marginale di X e Y.

b) Calcolare $E[X]$, $E[Y]$, $\mathrm{var}[X]$ e $\mathrm{var}[Y]$.

c) Determinare la covarianza $\mathrm{cov}[X,Y]$ delle variabili X e Y.

d) Determinare la funzione di densità di probabilità condizionata di X dato $Y=2$.

e) Determinare la funzione di ripartizione condizionata di X dato $Y=2$.

f) Determinare la funzione di densità di probabilità condizionata di Y dato $X=1$.

g) Determinare la funzione di ripartizione condizionata di Y dato $X=1$.

h) Determinare $E[X|Y=3]$.

Esercizio 2 (Tema d'esame del 10/01/2006).
Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $\{0, 1\}$ e Y una variabile aleatoria che assume i valori $\{2, 3\}$. Sapendo che

$$P[Y = 2] = \frac{2}{5},$$

$$P[X = 0|Y = 2] = P[Y = 2|X = 0] = \frac{1}{3},$$

calcolare la densità di probabilità congiunta di X e Y e la $\mathrm{cov}[X, Y]$.

$\left[\cdots, -\frac{2}{75}\right]$

Esercizio 3. Un gruppo di 5 transistor ne contiene 3 difettosi. I transistor vengono testati uno alla volta, per vedere quali funzionino e quali no. Denotiamo con X il numero di transistor testati prima di incorrere nel primo pezzo difettoso, e con Y il numero di ulteriori pezzi testati per trovare il secondo pezzo difettoso. Si scriva la funzione di massa di probabilità congiunta di X e Y. Si calcoli, inoltre, il coefficiente di correlazione lineare $\rho_{X,Y}$.

$\left[\cdots, \rho_{X,Y} = -\frac{1}{3}\right]$

Distribuzioni di funzioni di variabili casuali

Esercizio 4. Lanciamo tre volte una moneta e indichiamo con X la variabile casuale che denota il numero di volte in cui si ottiene testa e con Y la variabile casuale che denota il valore assoluto della differenza tra il numero di teste e il numero di croci ottenute.

Determinare:

1. la funzione di densità di probabilità congiunta di X e Y;
2. le funzioni di densità di probabilità marginali di X e di Y.

Esercizio 5 (Tema d'esame del 17/07/2007).

Un'urna contiene dodici palline numerate da 1 a 4, due con inciso il numero 1, due con inciso il numero 3, quattro con inciso il numero 4. Si estrae una pallina dall'urna. Siano X la variabile casuale che indica il numero inciso sulla pallina estratta e Y la variabile casuale definita da $Y = \frac{1}{2}(X-2)^2$.

a) Determinare la densità congiunta $f_{X,Y}$.

b) Determinare le densità marginali f_X e f_Y.

c) Verificare se X e Y sono indipendenti.

d) Calcolare la covarianza $\operatorname{cov}[X,Y]$.

e) Calcolare $P\left[X > 2 \,\middle|\, Y = \frac{1}{2}\right]$.

Esercizio 6. Un'azienda stipula un contratto per vendere barattoli di conserva di $500\ g$. La quantità di conserva X messa in ciascun barattolo è predeterminata meccanicamente ed è normalmente distribuita con media μ e deviazione standard $25\ g$.

a) A quale valore di μ deve essere tarata la macchina, affinché il 2% dei barattoli contenga meno di $500\ g$ di conserva?

b) Supponiamo che i barattoli siano di metallo e che il loro peso Y da vuoti segua una distribuzione $\mathcal{N}\left(90, 64\right)$. Se un ispettore pesa i barattoli pieni e scarta quelli il cui peso è inferiore $590\ g$, quale percentuale di barattoli non passerà l'ispezione?

$[551.375,\ 0.025]$

Esercizio 7 (Esercizio tratto dal tema d'esame del 22/12/2003).
Sia X la variabile casuale avente funzione di densità

$$f_X\left(x\right) = \begin{cases} e^{-(x-2)} & \text{se } x > 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Siano $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variabili casuali indipendenti e ciascuna con densità di probabilità f_X. Sia $Y = \min\left[X_1, X_2, \cdots, X_n\right]$. Calcolare la funzione di ripartizione e la funzione di densità della variabile casuale Y.