Probabilità e Statistica
Esercitazioni

a.a. 2009/2010

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica

Calcolo combinatorio

Ines Campa

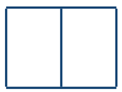
Dati n oggetti distinti, si dicono *disposizioni semplici di n oggetti di classe k*, tutti i gruppi che si possono formare di k elementi, in modo che due gruppi differiscano

- o per l'ordine,
- o per almeno un elemento.

$$D_{n,\,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Esercizio 1. Quanti numeri di due cifre distinte si possono formare con gli elementi dell'insieme $A = \{1,\,5,\,3,\,8\}$?

Risoluzione.



$D_{4,\,2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$.

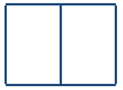
Dati n oggetti distinti, si dicono *disposizioni con ripetizioni di classe* k, tutti i gruppi che si possono formare di k elementi, con la possibilità di ripetizione degli elementi, in modo che due gruppi differiscano

- o per l'ordine,
- o per almeno un elemento,
- o per la ripetizione.

$$D^*_{n,\,k} = n^k.$$

Esercizio 2. Quanti numeri di due cifre si possono formare con gli elementi dell'insieme $A = \{1,\, 5,\, 3,\, 8\}$?

Risoluzione.



$D^*_{4,\,2} = 4^2 = 16$.

Dati n oggetti distinti, si dicono *permutazioni semplici di n elementi*, tutti i gruppi che si possono formare con gli n elementi, in modo che due gruppi differiscano

- per l'ordine degli elementi.

$$P_n = D_{n,\,n} = n!.$$

Esercizio 3. In quanti modi 3 diverse persone possono sedersi sulle 3 poltrone di una fila di un palco a teatro?

Risoluzione.

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$=6.

–

Dati n oggetti distinti, si dicono *combinazioni semplici di n oggetti di classe* k, tutti i gruppi che si possono formare con k degli n elementi, in modo che due gruppi differiscano

- per almeno un elemento.

$$C_{n,\,k}=\frac{D_{n,\,k}}{P_k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right).$$

Esercizio 4. Un barman ha a disposizione 4 liquori base, quanti cocktails può ottenere mescolandone 3 alla volta?

Risoluzione.

$$C_{4,\,3}=\left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array}\right)=\frac{4!}{3!\cdot 1!}=4.$$

–

Dati n oggetti distinti, si dicono *combinazioni di n oggetti con ripetizione di classe k*, tutti i gruppi che si possono formare con k degli n elementi, con la possibilità di ripetizione degli elementi, in modo che due gruppi differiscano

- o per almeno un elemento,
- o per la ripetizione.

$$C^*_{n,\,k} = \binom{n+k-1}{k} = C_{n+k-1,\,k}.$$

Esercizio 5. Sia $A = \{\nabla,\ \otimes\}$ quante sequenze di 3 simboli si possono formare scegliendo gli elementi in A?

Risoluzione. Le sequenze possibili sono $\nabla\nabla\nabla$, $\nabla\nabla\otimes$, $\otimes\nabla\otimes$, $\otimes\otimes\otimes$, ricordiamo che la sequenza $\nabla\nabla\otimes$ coincide con la sequenza $\nabla\otimes\nabla$ in quanto entrambe hanno $2\,\nabla$ e $1\,\otimes$. Ne segue

$$C^*_{2,\,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4.$$

–

Dati n oggetti di cui r_1 uguali tra loro, r_2 uguali tra loro e distinti dai precedenti, $\ldots\ldots$, r_k uguali tra loro e distinti dai precedenti, con

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n,$$

si dicono *permutazioni con ripetizione di* $r_1 + r_2 + \ldots + r_k$ *oggetti*, tutti i gruppi che si possono formare con gli n elementi, di cui alcuni indistinguibili in modo che due gruppi differiscano

- per l'ordine.

$$P^*_{r_1,\, r_2,\, \ldots,\, r_k} = \frac{(r_1 + r_2 + \ldots + r_k)!}{r_1! r_2! \ldots r_k!}$$

Esercizio 6. Quanti sono gli anagrammi della parola AF**A**?

Risoluzione. Si ha $r_1 = 2$, $r_2 = 1$. Quindi il numero degli anagrammi è $P^*_{2,\,1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$. Infatti, gli anagrammi possibili sono:

AF**A**, A**A**F, FA**A**

Esercizi

Esercizio 7. In quanti modi diversi quattro persone possono occupare quattro di cinque posti numerati?

$$[120]$$

Esercizio 8. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

1. Quanti numeri di tre cifre distinte si possono formare con i numeri dell'insieme A?
2. quanti di questi numeri sono dispari?
3. quanti terminano con 9?
4. quanti sono maggiori di 700?

$$[504,\ 280,\ 56,\ 168]$$

Esercizio 9. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1. Quanti numeri di tre cifre anche ripetute si possono formare con i numeri di A?
2. quanti di questi numeri sono dispari?
3. quanti sono maggiori di 700?

$$[729,\ 405,\ 243]$$

Esercizio 10. Quanti sono i numeri di tre cifre che si possono formare con i numeri $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ costituiti da

1. cifre tutte distinte?
2. cifre anche ripetute?

$[448,\ 648]$

Esercizio 11. Quanti anagrammi si possono formare con la parola DERIVATO? quanti di questi anagrammi finiscono con ATO?

$[40320,\ 120]$

Esercizio 12. Quanti anagrammi si possono formare con la parola STATISTICA? quanti di questi anagrammi iniziano per S?

$[75600,\ 15120]$

Esercizio 13. In quanti modi si possono distribuire 5 quaderni uguali a 4 bambini?

$[56]$

Esercizio 14. Le iniziali del nome e del cognome di una persona si dicono "'cifre"'e vengono stampate sulla copertina di un'agenda. Se si vogliono preparare gli stampi per tutte le cifre che si possono formare con le 26 lettere dell'alfabeto internazionale, quanti stampi é necessario disporre?

$[676]$

Esercizio 15. Quanti terni si possono formare con i 90 numeri del lotto?

$[117480]$

Esercizio 16. A un concorso per due posti di impiegato, rispettivamente negli uffici del magazzino e del personale di un'azienda partecipano 15 concorrenti. In quanti modi possibili tra i concorrenti vi possono essere due vincitori?

$[210]$

–

Esercizio 17. A un concorso con 3 posti partecipano 10 concorrenti. Quali sono le possibili terne di vincitori?

$$[120]$$

Esercizio 18. Determinare quanti colori si possono ottenere combinando in tutti i modi possibili i sette colori dell'iride.

$$\left[\sum_{k=1}^{7} C_{7,\,k}\right]$$

Esercizio 19. I geni (cioè i portatori di caratteri ereditari) compaiono in coppia in ogni cellula di un individuo. Nel caso più semplice ogni gene può presentarsi sotto due forme distinte (dette *alleli*) che indichiamo con A_1 ed A_2. Possiamo allora rappresentare questi tre tipi diversi di geni (detti *genotipi*) come

$$A_1\,A_1\,,\quad A_1\,A_2\,,\quad A_2\,A_2\,.$$

Quanti genotipi fornisce un gene con tre alleli?

$$[6]$$

–

Esercizio 20. (Tema d'esame del 06/09/05-C3) Una serratura si apre con un codice decimale di tre cifre. Sapendo che due cifre sono dispari, scelte tra $\{1,3,5,7,9\}$, e una pari, scelta tra $\{0,2,4,6\}$, trovare il numero massimo di tentativi che bisogna effettuare per aprire la serratura.

$[300]$

Esercizio 21. Sei amici, tre uomini e tre donne, si recano a teatro dove hanno prenotato una fila di 6 posti consecutivi. Se si vogliono sedere alternandosi uomini e donne, quante sono le possibili sistemazioni?

$[72]$

Esercizio 22. Una vettura ferroviaria ha 6 posti nel verso di marcia e 6 nel senso contrario, in quanti modi si possono disporre 6 viaggiatori di cui 4 vogliono sedersi nel senso di marcia e 2 nel senso opposto?

$[10800]$

Esercizio 23. In quanti modi un gruppo di sette persone si può disporre

1. in sette sedie allineate?
2. intorno ad un tavolo circolare?

$$[5040,\ 720]$$

Esercizio 24. In quanti modi diversi quattro ragazzi e tre ragazze possono occupare una fila di sette posti supponendo che i ragazzi stiano tutti insieme (occupino posti vicini) e le ragazze stiano tutte insieme (occupino posti vicini)?

$$[288]$$

Esercizio 25. Un'agenzia turistica organizza viaggi che prevedono la visita a quattro fra dieci prestabilite città. Calcolare

1. in quanti diversi modi un turista può scegliere le quattro città;
2. in quanti diversi modi l'agenzia può fissare gli itinerari.

$$[210,\ 5040]$$

–

Esercizio 26. Quanti numeri con meno di 5 cifre si possono formare, se si vuole che abbiano tutte le cifre dispari?

$[780]$

Esercizio 27. Un'urna contiene dieci palline bianche e cinque nere. Determinare in quanti modi quattro palline possono essere estratte dall'urna nell'ipotesi che esse

1. possano essere di qualsiasi colore;
2. debbano essere due bianche e due nere;
3. debbano essere tutte bianche;
4. debbano essere tutte nere;
5. debbano essere dello stesso colore.

$[1365, \ 450, \ 210, \ 5, \ 215]$

Esercizio 28. Considerando un mazzo di quaranta carte, calcolare quante possibili coppie si possono formare estraendo

1. due carte contemporaneamente;
2. due carte successivamente senza rimettere la prima carta estratta nel mazzo;
3. due carte successivamente rimettendo la prima carta nel mazzo.

$$[780,\ 1560,\ 1600]$$

Esercizio 29. Date nel piano 12 rette determinare il numero dei punti di intersezione sapendo che 5 sono parallele e le rimanenti sono a due a due incidenti.

$$[56]$$
