

Probabilità e Statistica Esercitazioni

a.a. 2009/2010

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica

Probabilità

Ines Campa

—
Esercizio 1. Da un collettivo che ha la seguente composizione per classi di età si sceglie a caso un individuo

classi di età	frequenza
[10; 20)	10
[20; 30)	30
[30; 40)	50
[40; 50)	30
[50; 60)	20
[60; 70)	20
[70; 80)	20
totale	180

Nell'ipotesi che ciascun individuo abbia la stessa probabilità di essere scelto dal collettivo, si determinino le probabilità relative ai seguenti eventi:

1. l'individuo scelto abbia meno di 50 anni;
2. l'individuo scelto abbia un'età non inferiore ai 60 anni;
3. l'individuo scelto abbia un'età non inferiore ai 20 anni, ma inferiore ai 50 anni.

$$\left[\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{11}{18} \right]$$

Esercizio 2. Se di 100 pezzi prodotti da un macchina, 10 sono controllati dal tecnico A, 16 dal tecnico B e 3 da entrambi. Qual è la probabilità che un pezzo scelto a caso tra i 100 sia stato controllato? Qual è la probabilità che un pezzo scelto a caso tra i 100 non sia stato controllato?

$$\left[\frac{23}{100}, \frac{77}{100} \right]$$

Esercizio 3. Siano assegnati due eventi A e B tali che $P(A) = 0.05$, $P(B) = 0.01$ e $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.945$, determinare $P(\bar{A})$, $P(A \cup B)$ e $P(A \cap B)$.

$$[0.95, 0.055, 0.005]$$

Esercizio 4. Il 72% dei maschi americani non fuma sigarette e il 93% non fuma il sigaro, mentre il 5% fuma entrambi. Qual è la probabilità che un maschio americano non fumi nè le sigarette nè il sigaro?

$$[0.7]$$

Esercizio 5. In un club sportivo, 36 soci giocano a tennis, 28 a squash e 18 a badminton. Inoltre, 22 soci giocano sia a tennis che a squash, 12 sia a tennis che a badminton, 9 sia a squash che a badminton e infine 4 giocano a tutti e tre gli sport. Quanti membri del club giocano ad almeno uno di questi sport?

$$[43]$$

Esercizio 6. Un dado viene truccato in modo che i numeri dispari abbiano una probabilità doppia di uscire di quelli pari. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

1. $A = \{ \text{esce il numero } 3 \}$;
2. $C = \{ \text{esce un numero primo} \}$.

$$\left[\frac{2}{9}, \frac{5}{9} \right]$$

Esercizio 7. Nell'Ippica, la corsa tris è una corsa dove gli scommettitori devono indovinare i cavalli che giungono al primo, secondo e terzo posto. Se alla partenza vi sono 12 cavalli, calcolare la probabilità di indovinare la sequenza di arrivo?

$$\left[\frac{1}{1320} \right]$$

Esercizio 8. Qual è la probabilità di fare una cinquina che contenga i numeri 90 e 1 al gioco del Lotto su una ruota fissata?

$$\left[\frac{2}{801} \right]$$

Esercizio 9. Qual è la probabilità che lanciando cinque volte una moneta, si ottenga 3 volte testa?

$$\left[\frac{5}{16} \right]$$

Esercizio 10. In un lotto di biscotti di 50 confezioni in scatole rigide, si trovano 5 scatole che sono esteriormente uguali alle altre ma che, per errore della macchina confezionatrice, sono vuote. Calcolare la probabilità che, estraendone 6 a caso, senza tener conto dell'ordine di estrazione, fra queste ve ne sono:

1. 2 vuote;
2. nessuna vuota.

[0.0937, 0.51256]

Esercizio 11. In un sacchetto ci sono dei gettoni sui quali è inciso un numero di due cifre ottenuto combinando due cifre scelte tra $\{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$. Qual è la probabilità che, in una estrazione, esca un numero maggiore di 70?

$\left[\frac{1}{3}\right]$

Esercizio 12. Un corso di probabilità è frequentato da 10 studenti: 6 maschi e 4 femmine. Viene effettuato un esame, e i punteggi degli studenti sono tutti diversi. Se tutte le classifiche si pensano equiprobabili, qual è la probabilità che le quattro studentesse ottengano i punteggi migliori?

$\left[\frac{1}{210}\right]$

Esercizio 13. Qual è la probabilità di fare tredici al gioco del Totocalcio?

$$\left[\frac{1}{3^{13}} \right]$$

Esercizio 14. Nel gioco del Poker, si distribuiscono, a ciascun giocatore 5 carte estratte da un mazzo di 32. Qual è la probabilità di avere un poker di assi (4 assi e una carta qualsiasi)?

$$\left[\frac{1}{7192} \right]$$

Probabilità Condizionata

Esercizio 15. Sono assegnati gli eventi A e B . Sapendo che $P(\bar{A}) = \frac{7}{11}$, $P(\bar{B}) = \frac{6}{11}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$, calcolare $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, $P(\bar{A}|\bar{B})$, $P(A|\bar{B})$.

$[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{11}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$

Esercizio 16. Si consideri l'esperimento del lancio di tre monete. Calcolare la probabilità

1. di tre croci, data una croce sulla prima moneta;
2. di tre croci, data almeno una croce.

$[\frac{1}{4}, \frac{1}{7}]$

Esempio 1. (tratto da Gerd Gigerenzer, *Quando i numeri ingannano. Imparare a vivere con l'incertezza*, Milano, 2003, Raffaello Cortina Editore)

In un certo paese viene eseguito lo screening mammografico per il cancro al seno. Supponiamo di sapere che per le donne, asintomatiche, tra i 40 e i 50 anni la probabilità che una di loro abbia il cancro al seno è del 0.8%. Se una donna ha il cancro al seno, la probabilità che il suo mammogramma risulti positivo è del 90%; se non ha il cancro al seno, c'è comunque una probabilità del 7% che il suo mammogramma sia positivo. Immaginiamo di essere in presenza di una donna con un mammogramma positivo: qual è la probabilità che abbia effettivamente il cancro?

Risoluzione. Siano $M = \{\text{malattia}\}$ e $Pos = \{\text{mammogramma positivo}\}$

Sappiamo che $P(M) = 0.008$, $P(Pos|M) = 0.90$, $P(Pos|\bar{M}) = 0.07$.

Allora $P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 0.992$,

$$\begin{aligned} P(M|Pos) &= \frac{P(M) \cdot P(Pos|M)}{P(M) \cdot P(Pos|M) + P(\bar{M}) \cdot P(Pos|\bar{M})} = \\ &= \frac{0.008 \cdot 0.90}{0.008 \cdot 0.90 + 0.992 \cdot 0.07} = 0.0939 \approx 9.4. \end{aligned}$$

—
Traduciamo in frequenze il testo proposto:

Ogni 1000 donne, 8 hanno il cancro al seno. Fra queste 8 donne con il cancro 7 ($8 \cdot 0.90 = 7.2$) hanno un mammogramma positivo. Fra le rimanenti 992 che non hanno il cancro, circa 69 ($992 \cdot 0.07 = 69.4$) hanno ugualmente un mammogramma positivo. Consideriamo un campione casuale di donne che dopo un controllo presentano un mammogramma positivo, quante di loro hanno veramente il cancro?

Soluzione

Fra le 76 ($69 + 7$) donne con un mammogramma positivo, solo 7 hanno il cancro al seno cioè:

$$P(M|Pos) = \frac{7}{76} = 0.092 \approx 9.2.$$

N.B. La differenza sui millesimi rispetto alla soluzione precedente è dovuta alle approssimazioni.

Esercizio 17. Si supponga di sapere che $\frac{7}{1000}$ della popolazione di una certa regione soffre di allergia. Si sa che un test effettuato su una persona soggetta ad allergia indica la presenza della malattia con probabilità dello 0.9, mentre lo stesso test effettuato su soggetti sani ha una probabilità di $\frac{1}{1000}$ di indicare erroneamente la presenza di una malattia. Scegliendo a caso una persona, il test mostra la presenza di una allergia: qual è la probabilità che il soggetto sottoposto a test sia veramente allergico?

[0.8638]

Esercizio 18. I tre macchinari industriali 1, 2, 3 producono gli stessi componenti elettronici. La produzione giornaliera è stata la seguente: 800 pezzi per il macchinario 1; 600 pezzi per il macchinario 2; 400 pezzi per il macchinario 3. Sono stati individuati dei pezzi difettosi prodotti dai tre macchinari: il 5% per il macchinario 1, il 4% per il macchinario 2, il 2% per il macchinario 3. I pezzi vengono confezionati in scatole contenenti 100 pezzi ciascuna, provenienti da uno stesso macchinario e in quella giornata sono state confezionate 18 scatole. Da una delle 18 scatole è stato scelto un pezzo ed è risultato difettoso. Qual è la probabilità che il pezzo sia stato prodotto dal macchinario 2?

$\left[\frac{1}{3}\right]$

Esercizio 19. Sono assegnate due urne che contengono palline colorate, l'urna A_1 contiene 1 pallina bianca, 2 palline nere e 3 palline verdi; l'urna A_2 contiene 3 palline bianche, 1 nera e 2 palline verdi. Si lancia un dado e se la faccia in alto presenta il numero 3 o 4 si estrae una pallina dall'urna A_1 , altrimenti si estrae una pallina dall'urna A_2 . Sapendo che la pallina estratta è verde, qual è la probabilità che sia stata estratta dall'urna A_1 ? Se invece la pallina è bianca, qual è la probabilità che sia stata estratta dall'urna A_2 ?

$$\left[\frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right]$$

Esercizio 20 (Tema d'esame del 11/04/2006). Su 3300 iscritti al primo anno della Facoltà di Ingegneria in un dato anno accademico; 1584 provengono dal Liceo scientifico, 990 dall'Istituto Tecnico Industriale e i rimanenti da altre scuole. Si sono iscritti al corso di Ingegneria Meccanica l'11% degli studenti in possesso di maturità scientifica, il 7% degli studenti in possesso di diploma di Perito Industriale e l'8% degli studenti provenienti da altre scuole. Scelto a caso uno studente iscritto al primo anno di corso di Ingegneria Meccanica. Qual è la probabilità che egli sia in possesso della maturità scientifica?

$$[0.5777]$$

—

Esercizio 21 (Tema d'esame del 05/09/2006). Un'urna contiene 35 monete con inciso, su entrambe le facce, Testa, 20 monete con inciso, su entrambe le facce, Croce, e 15 monete riportanti i classici simboli Testa e Croce. Si estrae a caso una moneta dall'urna e la si lancia. Sapendo che è uscita Testa, qual è la probabilità che l'altra faccia riporti il simbolo Testa?

$$\left[\frac{14}{17} \right]$$

Esercizio 22 (Tema d'esame del 25/07/2006). Siano U_1 ed U_2 due urne contenenti palline.

Supponiamo che

- U_1 contenga 60 % di palline bianche;
- U_2 contenga 70 % di palline bianche;
- U_1 contenga il triplo di palline di U_2 .

Poniamo ora tutte le palline delle due urne U_1 e U_2 in una sola urna U ed estraiamo una pallina. Sapendo che la pallina è bianca, qual è la probabilità che inizialmente appartenesse all'urna U_2 .

$$\left[\frac{7}{25} \right]$$

Esercizio 23. I pezzi prodotti da una certa ditta possono presentare due tipi di difetti con percentuali del 5% per il difetto 1 e del 7% per il difetto 2. Si assuma che i due tipi di difetti siano indipendenti poichè avvengono in momenti diversi della produzione.

- a) Determinare la probabilità che un pezzo presenti entrambi i difetti;
- b) determinare la probabilità che un pezzo sia difettoso;
- c) determinare la probabilità che un pezzo presenti il difetto 1, sapendo a priori che è difettoso;
- d) determinare la probabilità che un pezzo presenti uno solo dei due difetti, sapendo a priori che è difettoso.

[0.0035, 0.1165, 0.43, 0.97]

Esercizio 24. Se il figlio maggiore di una coppia con gli occhi castani ha gli occhi azzurri, qual è la probabilità che anche gli altri quattro figli hanno gli occhi azzurri supponendo che non ci siano gemelli?

$\left[\frac{1}{256} \right]$

Esercizio 25. La probabilità che Tizio vinca una partita di Tennis contro Caio è 0.35. Se Tizio e Caio giocano 5 partite, qual è la probabilità che Tizio vinca almeno una partita?

[0.88397]