

Probabilità e Statistica Esercitazioni

a.a. 2009/2010

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica

Estrazioni I

Ines Campa

Supponiamo di avere un'urna che contenga n palline numerate da 1 a n quindi distinguibili.

Esperimento: estrazione di palline dall'urna (una alla volta, scelte a caso) finché siano state estratte k palline \implies **campionamento di ampiezza k .**

Il numero totale di campioni **ordinati e diversi tra loro** che si ottengono estraendo k palline da un'urna che ne contiene n , fra loro distinguibili, è

a) $n^k = D_{n,k}^*$ se il campionamento è **con reimmissione**.

b) $\frac{n!}{(n-k)!} = D_{n,k}$ se il campionamento è **senza reimmissione**.

Ne segue

a) Ogni campione **ordinato** casuale di ampiezza k ha probabilità $\frac{1}{D_{n,k}^*}$ se l'esperimento avviene con reimmissione.

b) Ogni campione **ordinato** casuale di ampiezza k ha probabilità $\frac{1}{D_{n,k}}$ se l'esperimento avviene senza reimmissione.

Se l'estrazione **senza reimmissione** avviene anche **senza** tener conto **dell'ordine**, allora Il numero totale di campioni **non ordinati e diversi tra loro** che si ottengono estraendo k palline da un'urna che ne contiene n , fra loro distinguibili, è $C_{n,k}$.

Ne segue che ogni campione **non ordinato** casuale di ampiezza k , ottenuto dall'esperimento senza reimmissione, ha probabilità $\frac{1}{C_{n, k}}$.

Questo tipo di estrazione è anche detta **in blocco** essendo equivalente all'estrazione dall'urna di un blocco di palline.

Campione proveniente da popolazione mista

Applicazione dell'estrazione in blocco o della distribuzione di probabilità ipergeometrica: da un'urna contenente b palline bianche e r rosse se ne estraggono n , con $n \leq b + r$, senza reimmissione.

Qual è la probabilità che k di esse siano rosse?

Sia

$A_k = \{\text{nel campione di } n \text{ palline estratte ci sono } k \text{ palline rosse}\}.$

Si ha

$$P(A_k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$$

con $n - k \leq b$ e $k \leq r$.

Esercizio 1. Data un'urna contenente 11 palline numerate da 1 a 11, calcolare la probabilità che la pallina numero 8

- a) appartenga ad un campione casuale ordinato di ampiezza 5 ottenuto da un'estrazione senza reimmissione.
- b) appartenga ad un campione casuale non ordinato di ampiezza 5 ottenuto da un'estrazione senza reimmissione.

$$\left[\frac{5}{11}, \frac{5}{11} \right]$$

Esercizio 2. Da un mazzo di 52 carte vengono estratte in blocco cinque carte. Calcolare la probabilità che due carte siano due assi.

$$[0.03993]$$

Esercizio 3 (Tema d'esame del 05/09/2006). Ad un corso di Probabilità e Statistica sono iscritte 100 matricole, delle quali 80 hanno superato l'esame di Analisi Matematica A. Scelti a caso 4 studenti, qual è la probabilità che 3 di essi abbiano superato l'esame di Analisi Matematica A?

$$[0.4191]$$

Esercizio 4 (Tema d'esame del 04/07/2006). Ad un Master in comunicazione sono iscritti 20 dirigenti d'azienda di cui 8 di madre lingua inglese. Scelti a caso 4 dirigenti iscritti al master, qual è la probabilità che 3 siano di madre lingua inglese?

[0.1387]

Esercizio 5. Un'urna contiene 12 palline: 8 nere e 4 blu e da essa vengono effettuate delle estrazioni senza reimmissione.

- a) Calcolare la probabilità di estrarre due palline blu.
- b) Calcolare la probabilità che le seconda e la terza estratta siano entrambe blu, sapendo che la prima estratta era nera.
- c) Calcolare la probabilità che le seconda e la terza estratta siano entrambe blu.

$\left[\frac{1}{11}, \frac{6}{55}, \frac{1}{11} \right]$

Esercizio 6. Un'urna contiene 90 palline numerate da 1 a 90, Marco scommette con un suo amico di riuscire ad estrarre una delle palline contrassegnata con il numero 1, 2 o 3, in cinque tentativi senza reimmissione. Per aiutare la fortuna, non visto dall'amico, aggiunge nell'urna 3 palline supplementari con i numeri 1, 2 e 3. Qual è la probabilità che il trucco di Marco venga scoperto dall'amico?

[0.007]

Esercizio 7 (Tema d'esame del 13/12/2005). Un'urna contiene 5 palline di cui 3 nere e 2 bianche. Si estrae una pallina e, dopo averne guardato il colore, la si rimette a posto. A questo punto si inserisce nell'urna una pallina di colore opposto a quella appena estratta. Si determini la probabilità che alla seconda estrazione la pallina sia nera.

$\left[\frac{17}{30} \right]$

Esercizio 8. Da un mazzo di 52 carte vengono estratte successivamente due carte senza che la prima carta estratta venga reinserita. Calcolare la probabilità che la somma delle due carte sia pari a 21, nell'ipotesi che l'asso valga 11 e le figure 10.

$\left[\frac{32}{663} \right]$