Probabilità e Statistica
Esercitazioni

a.a. 2009/2010

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica

Variabili casuali I

Ines Campa

Esercizi

Esercizio 1. Dire se le seguenti funzioni sono funzioni di ripartizione di una variabile casuale reale:

1. $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{50}x^2 & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1 & \text{se } 5 \leq x < 10 \\ 1 & \text{se } x \geq 10 \end{cases}$$

2. $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -x + 3 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

3. $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

[sì, no, sì]

—

Esercizio 2. Si consideri un'urna contenente 6 palline verdi e 4 blu. Sia X la variabile casuale discreta che denota il numero di palline verdi estratte in un'estrazione in blocco di 3 palline. Determinare

a) la funzione densità di probabilità e tracciarne il grafico;

b) la funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico;

c) la probabilità che al più 1 pallina sia verde;

d) $P\left[0 < X \leq 2\right], P\left[1 \leq X \leq 3\right]$.

$$\left[\begin{cases} \frac{1}{30} & \text{se } x = 0 \\ \frac{3}{10} & \text{se } x = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 2 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{30} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{6} & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{29}{30}\right]$$

Esercizio 3. Si consideri la variabile casuale continua X che rappresenta la durata di un pezzo in anni, con densità di probabilità data da

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{78}\left(x^2+1\right) & \text{se } 0 \le x \le 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare $P[X \le 4]$, $P[2 < X \le 5]$, $P[2 \le X \le 5]$ e $P[X > 2]$.

$$\left[\frac{38}{117},\ \frac{7}{13},\ \frac{7}{13},\ \frac{110}{117}\right]$$

Esercizio 4. Calcolare la costante di normalizzazione della densità di probabilità di una variabile casuale X definita da

$$f_X(x) = \begin{cases} Ce^{-2x} & \text{se } x \ge 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare, inoltre, $P[X > 1]$.

$$\left[2,\ e^{-2}\right]$$

Esercizio 5. Sia assegnata una variabile casuale X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Calcolare la corrispondente funzione di ripartizione.

$$\left[\begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}x & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2. \end{cases} \right]$$

Esercizio 6. La funzione di ripartizione di una variabile casuale X è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{1}{3}x\right) & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Determinare

1. $P\left[X > \frac{2}{3}\right]$,
2. $P\left[-1 < X \leq 1\right]$.

$\left[\frac{20}{27},\ \frac{1}{2}\right]$

Esercizio 7 (Tema d'esame del 28/06/2005). La quantità (in quintali) di rifiuti smaltiti da un'industria in giornata è una variabile aleatoria X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq 5a \\ k(10a - x) & \text{se } 5a < x \leq 10a \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Nel caso in cui $a = \frac{6}{5}$, si chiede:

1. Calcolare k e disegnare il grafico di $f_X(x)$.
2. Considerati gli eventi

$$A = \{\text{i rifiuti smaltiti sono più di } 5a \text{ quintali}\}$$

$$B = \{\text{i rifiuti smaltiti sono meno di } 5a \text{ quintali}\}$$

$$C = \{\text{la quantità di rifiuti smaltiti è compresa tra } 2.5a \text{ e } 7.5a \text{ quintali}\},$$

calcolare la probabilità $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$. Gli eventi A e B sono indipendenti? Gli eventi A e C sono indipendenti?

$$\left[\frac{1}{36}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}, \text{non ind., ind.}\right]$$

Esercizio 8 (Tema d'esame del 09/12/2003).

a) Determinare la costante k di normalizzazione della densità di una variabile casuale X definita da

$$f_X(x) = \begin{cases} k\,x(2-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 2, \end{cases}$$

e tracciare il grafico di $f_X(x)$.

b) Determinare la corrispondente funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico.

c) Calcolare $P[X > 1]$ e $E[X]$.

$$\left[\frac{3}{4},\ \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{1}{3}x\right) & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases},\ \frac{1}{2},\ 1 \right]$$

Esercizio 9. Determinare la funzione di densità associata alla funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{50}x^2 & \text{se } 0 \le x < 5 \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1 & \text{se } 5 \le x < 10 \\ 1 & \text{se } x \ge 10 \end{cases}$$

Determinare, inoltre, $E[X]$.

$$\left[\begin{cases} \frac{1}{25}x & \text{se } 0 \le x < 5 \\ -\frac{1}{25}x + \frac{2}{5} & \text{se } 5 \le x < 10 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, 5 \right]$$

Esercizio 10. Supponiamo che il tempo necessario per riparare un personal computer sia una variabile casuale misurata in ore la cui densità è data da

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Il costo del lavoro è variabile, se sono necessarie x ore per la riparazione, il relativo costo è pari a $40 + 30\sqrt{x}$ euro. Calcolare il valore atteso del costo di una riparazione.

$$[68.28 \text{ euro}]$$

–

Esercizio 11. Sapendo che $E\left[X\right]=2$, $E\left[X^2\right]=8$, calcolare $E\left[4\left(1+2X\right)^2\right]$.

$[164]$

Esercizio 12 (Tema d'esame del 28/06/2005).
Sia assegnata una variabile casuale X con densità di probabilità

$$f_X\left(x\right)=\begin{cases}-\frac{1}{15}x^2+\frac{2}{5} & \text{se } -2\leq x<1\\ 0 & \text{altrove.}\end{cases}$$

Calcolare $E\left[X\right]$.

$\left[-\frac{7}{20}\right]$

Esercizio 13. Un'urna contiene 30 palline numerate da 1 a 30. Sia X la variabile casuale che denota il resto della divisione col numero 6 del numero inciso sulla pallina estratta. Determinare $E\left[X\right]$, $\mathrm{var}\left[X\right]$ e σ_X.

$\left[\frac{5}{2},\ \frac{35}{12},\ 1.71\right]$

Esercizio 14. Il tempo di vita di un fusibile è una variabile casuale X di densità

$$f_X(x) = a^2 x \cdot e^{-ax} \cdot I_{[0,+\infty)}(x) \quad \text{con } a \neq 0.$$

Calcolare il tempo di vita media.

$$\left[\frac{2}{a}\right]$$

Esercizio 15. Si consideri l'estrazione in blocco di 3 palline da un'urna contenente 6 palline verdi e 4 blu. Sia X la variabile casuale discreta che denota il numero di palline verdi estratte. Determinare $E[X]$, $\text{var}[X]$ e σ_X.

$$\left[\frac{9}{5},\ \frac{14}{25},\ 0.748\right]$$

Esercizio 16 (Tema d'esame del 13/12/2005). Sia X la variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{9} & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare il momento assoluto del secondo ordine e $\text{var}[X]$.

$$\left[\frac{3}{5},\ \frac{43}{80}\right]$$

Esercizio 17. Sia assegnata una variabile casuale X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}\left(4x - 2x^2\right) & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare $E[X]$, $\text{var}[X]$ e σ_X.

$$\left[1\,,\,\frac{1}{5}\,,\,\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$$

Esercizio 18.

a) Determinare la costante k di normalizzazione della densità di una variabile casuale X definita da

$$f_X(x) = \begin{cases} k\,\sin x \cos x & \text{se } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e tracciare il grafico di f_X.

b) Determinare la corrispondente funzione di ripartizione F_X.

c) Calcolare $E[X]$.

d) Calcolare $\text{var}[X]$.

$$\left[2\,,\,\frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right) I_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right)} + I_{\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right)}\,,\,\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\right]$$

Esercizio 19 (Esercizio tratto dal tema d'esame del 22/12/2003). Sia X la variabile casuale avente funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-(x-2)} & \text{se } x > 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare la corrispondente mediana $\mathrm{med}\,[X]$.

$$[2 + \ln 2]$$

Esercizio 20 (Tema d'esame del 07/12/2004). Il tempo, in ore, della durata di funzionamento di un computer (prima di bloccarsi) è una variabile aleatoria continua data da

$$f_X(x) = \begin{cases} C\, e^{-\frac{x}{100}} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

1. Determinare la costante C di normalizzazione e tracciare il grafico di $f_X(x)$.
2. Determinare la corrispondente funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico.
3. Qual è la probabilità che il computer funzioni tra le 50 e le 150 ore prima di bloccarsi?

$$\left[\frac{1}{100},\ F_X(x) = \left(1 - e^{-\frac{x}{100}}\right) I_{[0,+\infty)}(x),\ 0.3834\right]$$

Esercizio 21 (Tema d'esame del 22/12/2003).

1. Verificare che la seguente funzione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \ln x & \text{se } 1 \le x < e \\ 1 & \text{se } x \ge e \end{cases}$$

   è una funzione di ripartizione di una variabile casuale X e tracciarne il grafico.

2. Determinare la corrispondente funzione di densità f_X e tracciarne il grafico.
3. Calcolare $E[X]$ e $\mathrm{var}[X]$.
4. Calcolare $P[X > 3]$ e $P[X > 2]$.

$$\left[f_x(x) = \frac{1}{x} \cdot I_{[1,\, e)}(x),\ e - 1,\ \frac{4e - e^2 - 3}{2},\ 0,\ 0.30685 \right]$$