10 Verifica delle ipotesi

10.1 Introduzione

La verifica delle ipotesi è strettamente connessa al problema della stima. Si consideri un c.c.$(X_1, ..., X_n)$ estratto da una popolazione con funzione di densità $f(\cdot; \theta)$. Ora non ci preoccupiamo più di stimare il parametro incognito θ, ma utilizziamo il campione per verificare qualche ipotesi che coinvolga il parametro.

Definizione: Un'ipotesi statistica è un'affermazione sul parametro della distribuzione della popolazione che non sappiamo se sia vera o falsa.

Definizione: Un test è una procedura per determinare se i valori del campione e l'ipotesi sono compatibili.

In molti problemi di verifica, due sono le ipotesi che vengono discusse:

IPOTESI NULLA : H_0

IPOTESI ALTERNATIVA : H_1

Il test è definito da una regione C detta regione critica del test:

accetta H_0 se $(X_1, ...X_n) \notin C$
rifiuta H_0 se $(X_1, ...X_n) \in C$.

In qualunque test per verificare un'ipotesi nulla il risultato può essere sbagliato in due modi.

Errore di 1^a specie : rifiutare H_0 quando è vera

Errore di 2^a specie : accettare H_0 quando è falsa

Quando H_0 è vera, la probabilità che venga rifiutata non deve superare un certo valore α detto livello di significatività del test (fissato in anticipo, p.es. 0.1, 0.05, 0.005).

$\alpha = P$ (errore di 1^a specie)
$\beta = P$ (errore di 2^a specie)

Decisione	H_0 vera	H_0 falsa
Non rifiutare H_0	Decisione corretta Confidenza $= 1 - \alpha$	Errore di seconda specie $P(\text{err } 2^a \text{ sp}) = \beta$
Rifiutare H_0	Errore di prima specie = livello di significatività $P(\text{err } 1^a \text{ sp}) = \alpha$	Decisione corretta Potenza $= 1 - \beta$

Tra tutti i test che possiedono un errore di 1^a specie con lo stesso livello di significatività (ampiezza), si sceglie quello con ampiezza d'errore di 2^a specie più piccolo.

Ci sono vari metodi per la determinazione di un test. Noi esaminiamo quello chiamato metodo del-l'intervallo di confidenza, che consiste nell'usare un intervallo di confidenza per ottenere un test.

Molti problema di verifica di ipotesi riguardano i parametri (media, varianza) di distribuzioni normali.

- TEST SULLA MEDIA
  1) se la varianza è nota (test Z)
  2) se la varianza non è nota (test t di Student)
- TEST SULLA VARIANZA
  1) se la media non è nota (test χ^2)
  2) se la media è nota (test χ^2)

10.2 Test sulla media di una popolazione normale quando la varianza è nota

10.2.1 Test bilaterali o a due code

Dato un c.c. $(X_1, ...X_n)$ estratto da una popolazione normale $N(\mu, \sigma^2 \text{ nota})$ e fissato un certo valore μ_0, si verifichi

$$\text{l'ipotesi nulla } H_0 : \mu = \mu_0$$

contro

$$\text{l'ipotesi alternativa } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

La media campionaria $\overline{X}_n$ è lo stimatore puntuale per la media incognita μ della popolazione. Perciò H_0 si accetta quando $\overline{X}_n$ non si discosta troppo da μ_0. Allora definiamo la regione critica C

$$C = \{(X_1, ..., X_n) : |\overline{X}_n - \mu_0| > c\}$$

con c costante opportuna.

Se si desidera che α sia il livello di significatività del test, bisogna calcolare c in modo che

$$\alpha = P(\text{errore di } 1^{\text{a}} \text{ specie}) = P(|\overline{X}_n - \mu_0| > c)$$

Poichè $\overline{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow Z \sim N(0,1)$ dove
$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
si ha:

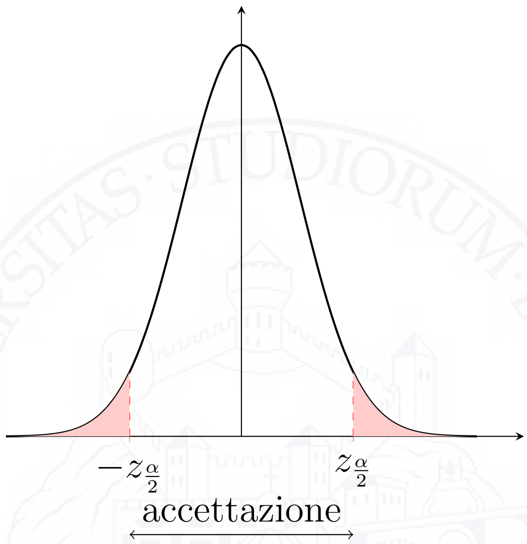
$$\alpha = P(\frac{|\overline{X}_n - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}) = P(|Z| > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma})$$
$$= 2P(Z > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma})$$

e quindi $P(Z > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}) = \frac{\alpha}{2}$
ma $P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}$
cioè $c = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

REGOLA:

$$\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } \left|\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{si accetta } H_0 \text{ se } \left|\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$$



Esempio

(A) Sorgente
segnale di valore μ

(B) Ricevente
segnale ricevuto con rumore $\sim N(\mu, 4)$ $(\sigma = 2)$

Per ridurre il rumore il segnale viene inviato 5 volte. La media campionaria dei 5 segnali ricevuti è $\overline{X}_n = 9.5$.

(B) ha motivo di credere che il valore inviato sia $\mu = 8$. Verificare tale ipotesi:

- al livello del 5%

  $H_0 : \mu = \mu_0 = 8 \qquad H_1 : \mu \neq 8$

  $\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

  $$\frac{|\overline{X}_n - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{9.5 - 8}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot (1.5) = \underline{1.68}$$

  $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$

  $1.68 < 1.96 \Rightarrow$ si accetta H_0.

- al livello del 10%

  $\alpha = 0.1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$

  $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645$

  $1.68 > 1.645 \Rightarrow$ si rifiuta H_0.

Problema: Qual è il livello "giusto" da scegliere?

Prima si calcola il valore della statistica del test cioè $\frac{|\overline{X}_n - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, poi la probabilità che una normale standard, in valore assoluto, superi tale quantità. Questa probabilità, detta il "p-dei-dati" o "p-value" del test fornisce il livello di significatività critico, al di sotto del quale la decisione cambia da rifiuto ad accettazione.

Cioè, determinato il valore $\frac{|\overline{X}_n-\mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = ST$ si calcola $P(|Z| \geq ST)$ = p-dei-dati e l'ipotesi H_0 ($\mu = \mu_0$) viene accettata $\forall\alpha <$ p-dei-dati.

$$\text{se il p-dei-dati} \begin{array}{l} > \alpha \text{ non si rifiuta } H_0 \\ \leq \alpha \text{ si rifiuta } H_0 \end{array}$$

Esempio (precedente con $\alpha = 0.05$)

- se $\overline{X}_n = 8.5$
$$\frac{|\overline{X}_n - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{8.5-8}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 0.5 \approx 0.559$$
$P(|Z| > 0.559) = 2P(Z > 0.559) = 2{\cdot}0.2877 = 0.5754$.
Il valore critico è altissimo $\Rightarrow$ H_0 si accetta.

- se $\overline{X}_n = 11.5$
$$\frac{|\overline{X}_n - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \approx 3.91$$
$P(|Z| > 3.91) = 2P(Z > 3.91) = 0.0001$
Il valore critico è piccolissimo $\Rightarrow$ H_0 si rifiuta.

La probabilità di un errore di 2^a specie (accetto H_0 quando è falsa) dipende da μ.

$$\begin{aligned}
\beta(\mu) &= P(\text{accettare } H_0) \text{ quando la media reale è } \mu. \\
&= P\left(\frac{|\overline{X}_n - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= P\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - z_{\frac{\alpha}{2}}\right)
\end{aligned}$$

dove $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

<u>Esempio</u> (precedente $n = 5$, $\sigma = 2$)
Quanto vale la probabilità di accettare $\mu = 8\,(= \mu_0)$ quando in realtà $\mu = 10$ con un l.d.s. $\alpha = 0.05$?
$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$

$$\begin{aligned}
\beta(10) &= \Phi(-\sqrt{5}+1.96) - \Phi(-\sqrt{5}-1.96) \\
&= \Phi(-0.276) - \Phi(-4.196) \\
&= \cancel{1} - \Phi(0.276) - \cancel{1} + \Phi(4.196) \approx 1 - 0.60835 \\
&\simeq 0.39165
\end{aligned}$$

La funzione $1-\beta(\mu)$ è detta funzione di potenza del test.
Per μ fissato la potenza del test è la probabilità di rifiutare (correttamente) l'ipotesi nulla H_0 quando μ è il valore vero.

10.2.2 Test unilaterali o ad una coda

- $H_0 : \mu = \mu_0$ contro $H_1 : \mu > \mu_0$
  $(\mu \leq \mu_0)$

Si rifiuta l'ipotesi nulla quando $\overline{X}_n$, stimatore di μ è molto più grande di μ_0.
La regione critica è così definita:

$$C = \left\{(X_1, ..., X_n) : \overline{X}_n - \mu_0 > c\right\}$$

con c tale che $\alpha = P(\overline{X}_n - \mu_0 > c)$

Se $\mu = \mu_0\,,\ \overline{X}_n \sim N(\mu_0, \dfrac{\sigma^2}{n})$

e $Z = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

perciò:

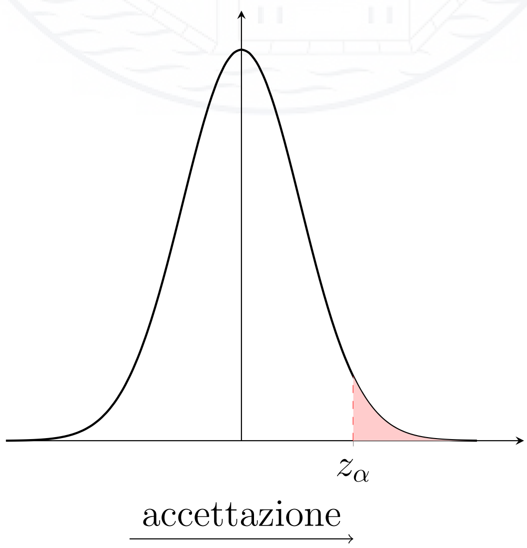
$$\alpha = P(Z > c\frac{\sqrt{n}}{\sigma}), \text{ ma } P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

$\Rightarrow \boxed{c = z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ Per il test con livello di significatività α vale

REGOLA:

si rifiuta H_0 se $\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_\alpha$

si accetta H_0 se $\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_\alpha$



$$
\begin{aligned}
\beta(\mu) = P(\text{accettare } H_0) &= P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_\alpha\right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_\alpha\right) \\
&= P\left(Z \le \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_\alpha\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_\alpha\right)
\end{aligned}
$$

Poichè $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow \beta(\mu_0) = 1 - \alpha$.

<u>Esempio</u> (precedente)
Si sa che il segnale inviato è superiore a 8. I dati sono compatibili con l'ipotesi che la media è 8?

$H_0 : \mu = 8$ contro $H_1 : \mu > 8$ (alternativa a una coda)

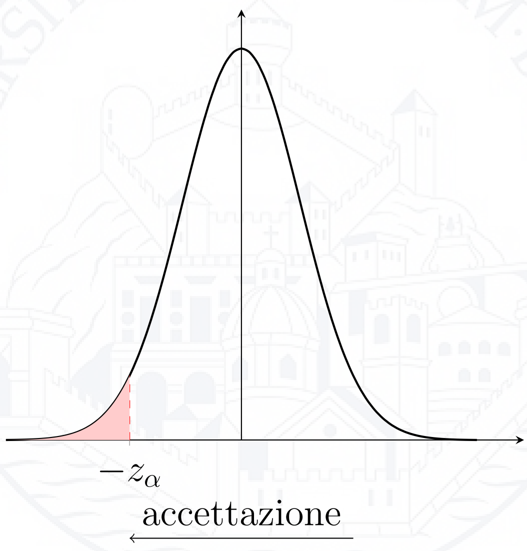
Se $\overline{X}_n = 9.5\,,\ \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = 1.68\,,\ z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

e poichè $1.68 > 1.645 \Rightarrow H_0$ va rifiutata.

- $H_0 : \mu = \mu_0$ $(\mu \geq \mu_0)$ contro $H_1 : \mu < \mu_0$

Al livello di significatività α si ha
REGOLA:

$$\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_\alpha$$
$$\text{si accetta } H_0 \text{ se } \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq -z_\alpha$$



<u>Osservazione</u>: l'analogia tra la stima di parametri attraverso gli intervalli di confidenza e la verifica delle ipotesi è evidente.

10.3 Test sulla media di una popolazione normale quando la varianza non è nota

10.3.1 Test bilaterali o a due code

Sia dato un c.c. $X_1, ..., X_n$ estratto da un popolazione normale N con μ e σ^2 incognite.

$H_0 : \mu = \mu_0$ contro $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Poichè σ^2 non è nota, si usa come statistica la deviazione standard campionaria

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \overline{X}_n)^2}$$

e sappiamo che $T_{n-1} = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$.

Si rifiuta l'ipotesi nulla H_0 quando $|\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}| > c$ con c da determinare in funzione di α.

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{errore di } 1^a \text{ specie}) \\ &= P(|T_{n-1}| > c) = 2P(T_{n-1} > c) \end{aligned}$$

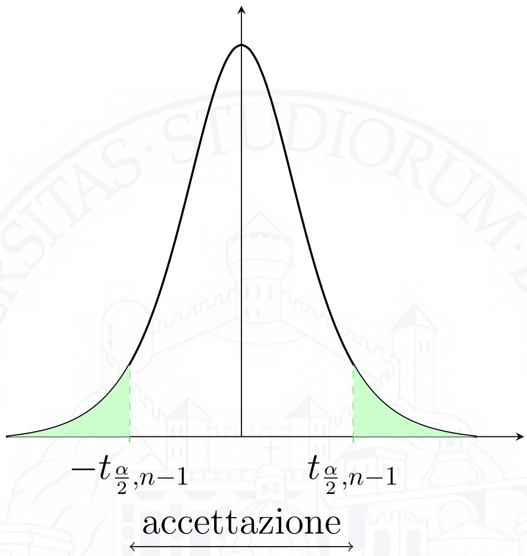
$\Rightarrow P(T_{n-1} > c) = \frac{\alpha}{2}$, ma $P(T_{n-1} > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}) = \frac{\alpha}{2}$

perciò: $\boxed{c = t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}$

REGOLA:

$$\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } \left|\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$$

$$\text{si accetta } H_0 \text{ se } \left|\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$$



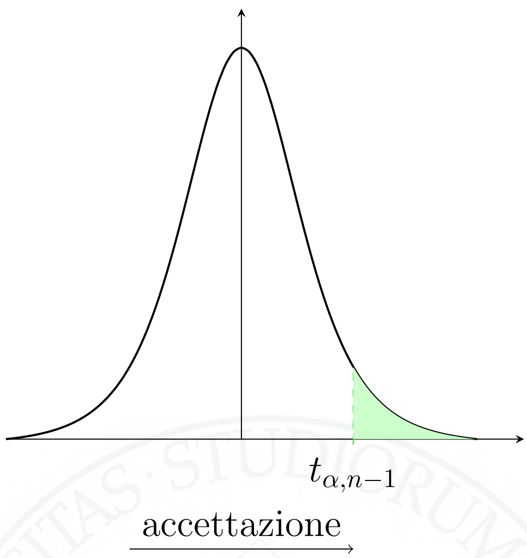
10.3.2 Test unilaterali o ad una coda

- $H_0 : \mu = \mu_0 \ (\mu \leq \mu_0)$ contro $H_1 : \mu > \mu_0$

al livello di significatività α.
REGOLA:

$$\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{\alpha, n-1}$$

$$\text{si accetta } H_0 \text{ se } \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{\alpha, n-1}$$

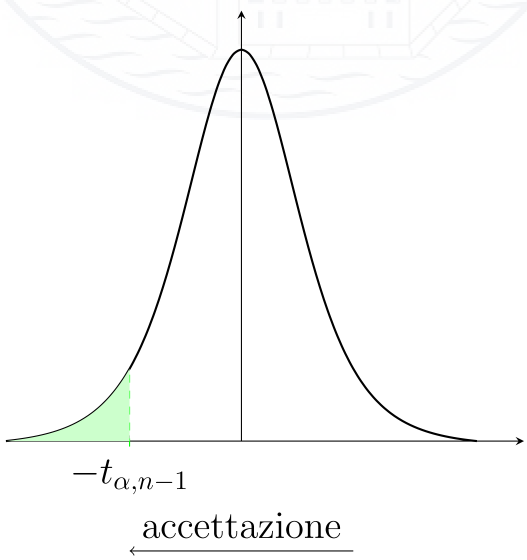


- $H_0 : \mu = \mu_0 \ (\mu \geq \mu_0)$ contro $H_1 : \mu < \mu_0$

REGOLA:

$$\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < -t_{\alpha,\, n-1}$$

$$\text{si accetta } H_0 \text{ se } \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \geq -t_{\alpha,\, n-1}$$



Esempio

Il produttore di un pneumatico afferma che la vita media del suo prodotto è di almeno 40000 miglia. Preso un campione di 12 pneumatici si trovano i seguenti dati (1000 = unità)

Gomma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Vita	36.1	40.2	33.8	38.5	42	35.8	37	41	36.8	37.2	33	36

Fissiamo $\alpha = 5\%$. Verifichiamo

$$H_0 : \mu \geq 40 \text{ contro } H_1 : \mu < 40$$

I calcoli forniscono:

$\overline{X}_n \simeq 37.2833$

$S \simeq 2.7319 \quad (S^2 = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(X_i - \overline{X}_n)^2)$

$$T_{n-1} = \frac{(37.2833 - 40)}{\frac{2.7319}{\sqrt{12}}} \approx -3.445$$

$-t_{0.05,11} = -1.796$

$-3.445 < -1.796 \Rightarrow H_0$ va rifiutata.

Esempio

Si vuole verificare l'ipotesi che il consumo medio di H_2O per abitazione sia di 350 galloni al dì. Per un campione di 20 abitazioni si ha:

340	356	332	362	318	344	386	402	322	360
362	354	340	372	338	375	364	355	324	370

Cosa si conclude?

Dobbiamo verificare

$H_0 : \mu = 350$ contro $H_1 : \mu \neq 350$

$\overline{X}_n = 353.8$

$S \approx 21.85$

$$T_{n-1} = \frac{3.8}{\frac{21.85}{\sqrt{20}}} \approx \underline{0.778}$$

- se $\alpha = 0.10 \quad \frac{\alpha}{2} = 0.05 \quad t_{\frac{\alpha}{2},19} = t_{0.05,19} = 1.729$

$0.778 < 1.729$ l'ipotesi H_0 è accettata ad un livello del 10%.

- se $\alpha = 0.05 \;\; \frac{\alpha}{2} = 0.025 \;\; t_{\frac{\alpha}{2},19} = t_{0.025,19} = 2.093$

$0.778 < 2.093$ l'ipotesi H_0 è accettata ad un livello del 5%.

10.4 Test sulla varianza di una popolazione normale quando la media non è nota

10.4.1 Test bilaterali

Sia dato un c.c. $X_1, ..., X_n$ estratto da una una popolazione N con μ e σ^2 incognite.

Si vuole verificare per un valore σ_0^2 fissato:

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contro $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Ricordiamo la statistica

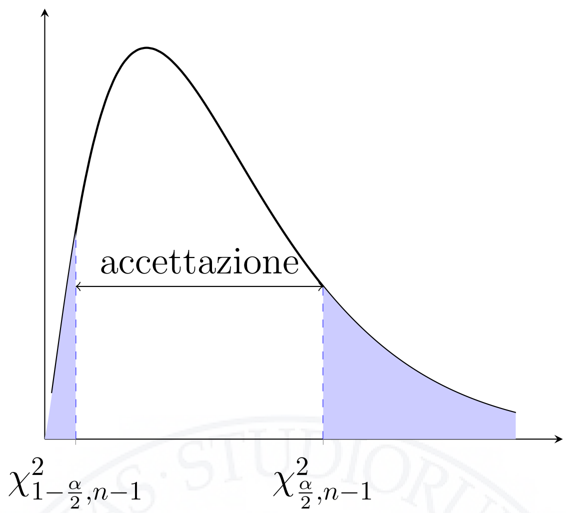
$$V := \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Perciò si adotta la seguente

REGOLA:

si accetta H_0 se $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$

si rifiuta H_0 negli altri casi



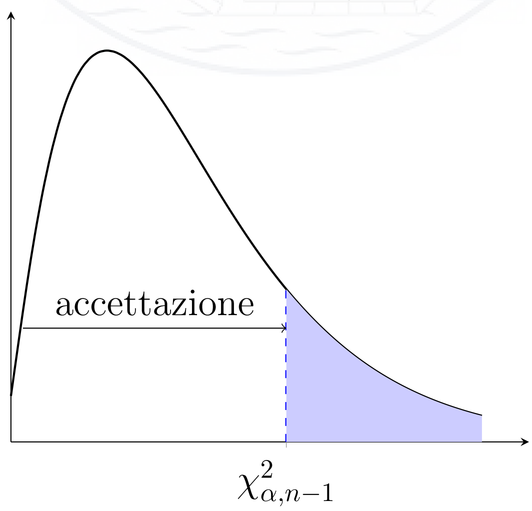
10.4.2 Test unilaterali

- $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 (\sigma^2 \leq \sigma_0^2)$ contro $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

REGOLA:

$$\text{si accetta } H_0 \text{ se } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{\alpha,n-1}$$

$$\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\alpha,n-1}$$

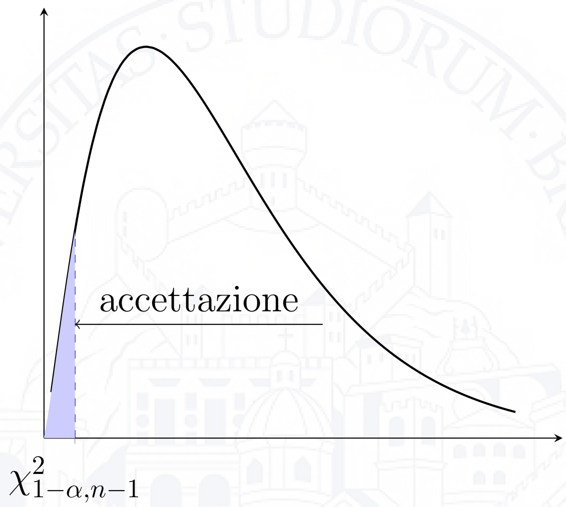


- $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 (\sigma^2 \geq \sigma_0^2)$ contro $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

REGOLA:

si accetta H_0 se $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{1-\alpha,n-1}$

si rifiuta H_0 se $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$



<u>Esempio</u>

Una macchina deve controllare la quantità di filo su un rocchetto. Va considerata efficiente se la deviazione standard della quantità di nastro selezionata non supera i 0.15cm.
Un campione di 20 pezzi fornisce una varianza campionaria $S^2 = 0.025\text{cm}^2$.
Si può concludere che la macchina non è efficiente?

H_0 = macchina efficiente.
$\sigma_0 = 0.15$, $\sigma_0^2 = 0.0225$

Le due ipotesi sono:
$H_0 : \sigma^2 \leq 0.0225$ contro $H_1 : \sigma^2 > 0.0225$

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \cdot 0.025}{0.0225} \approx 21.11$$

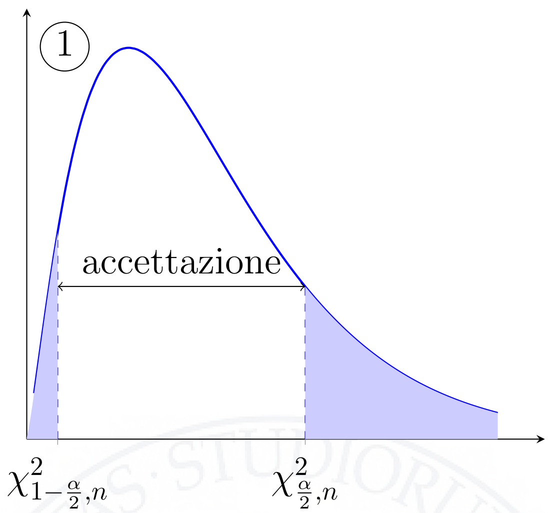
se $\alpha = 5\% = 0.05$, $\chi^2_{0.05,19} \cong 30.144$
e poichè $21.11 < 30.144$, H_0 va accettata.

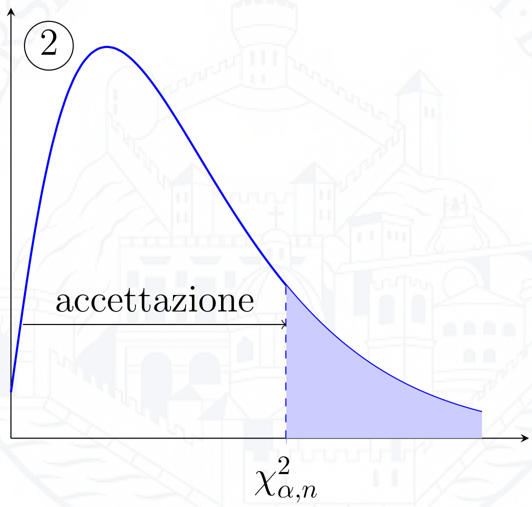
10.5 Test sulla varianza di una popolazione normale quando la media è nota

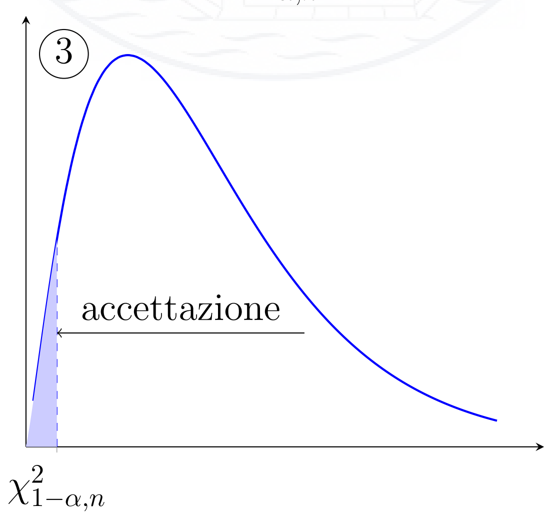
È possibile costruire test per la varianza anche quando μ è nota. In analogia a quanto detto per gli intervalli di confidenza la statistica da utilizzare è:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$$

1. bilaterale $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
2. unilaterale $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$
3. unilaterale $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$


1
accettazione
$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}$
$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}$


2
accettazione
$\chi^2_{\alpha,n}$


3
accettazione
$\chi^2_{1-\alpha,n}$

<u>Osservazioni</u>

1) test sulla media con σ^2 nota

- se c.c. è estratto da N si usa

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

- se c.c. è estratto da $f(\mu, \sigma^2 \text{nota})$ qlq.
basta che $n \geq 30$ che per TLC $\Rightarrow Z \dot{\sim} N(0,1)$

2) test sulla media con σ^2 incognita

- se c.c. è estratto da N ed <u>n è grande</u> si usa ancora la statistica

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

dove si sostituisce σ incognita con S deviazione standard campionaria.

- se c.c. è estratto da N ed <u>n è piccolo</u> si usa

$$T_{n-1} = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

3) test sulla varianza con μ incognita

- se c.c. è estratto da N ed <u>n è grande o piccolo</u> si usa

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

4) test sulla varianza con μ nota

- se c.c. è estratto da N ed <u>n è grande o piccolo</u> si usa

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$$

10.6 Test sulla proporzione di una popolazione (*)

In uno schema successo/insuccesso (o schema di Bernoulli), sia p la percentuale di successi in una popolazione.

La media campionaria $\overline{X}_n$ è la stima puntuale di p, che indichiamo con $\overline{X}_n = \hat{p}$.

Se $n \geq 30$, per il TLC, $\hat{p}$ ha una distribuzione normale con media μ e varianza $\sigma^2 = \dfrac{p(1-p)}{n}$.

I tests sulla proporzione sono:

a) $H_0 : p = p_0 \qquad H_1 : p \neq p_0$

b) $H_0 : p \leq p_0 \qquad H_1 : p > p_0$

c) $H_0 : p \geq p_0 \qquad H_1 : p < p_0$

Sia

$$ST = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

REGOLE:

caso a)

$$\text{si accetta } H_0 \text{ se } |ST| < z_{\frac{\alpha}{2}}$$
$$\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } |ST| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$$

caso b)

$$\text{si accetta } H_0 \text{ se } ST < z_\alpha$$
$$\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } ST \geq z_\alpha$$

caso c)

$$\text{si accetta } H_0 \text{ se } ST > -z_\alpha$$
$$\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } ST \leq -z_\alpha$$

Esempio

Si considerino 500 lanci di una moneta. Sapendo che per 267 volte è uscita testa, possiamo concludere, ad un livello del 5%, che la moneta è truccata?

Se la moneta non è truccata allora $p_T = p_C = 1/2$, pertanto il test è:

$H_0 : p = p_0 = 0.5$ contro $H_1 : p \neq p_0 = 0.5$

Poichè $n \gg 30$ per il TLC possiamo utilizzare il test Z.

$\hat{p} = \dfrac{267}{500} = 0.534\,,\ \alpha = 0.05\,,\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$

$$ST = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.534 - 0.5}{\sqrt{\dfrac{0.5 \cdot 0.5}{500}}} = 1.52$$

Poichè $1.52 < 1.96$ si accetta H_0, cioè la moneta non è truccata.

Si perviene allo stesso risultato utilizzando il metodo del p-dei-dati:

$$P[|Z| > 1.52] = 2P[Z > 1.52] = 0.1286$$

$0.1286 > 0.05$ quindi non c'è trucco.

Cosa possiamo concludere se su 500 lanci è uscita testa per 280 volte?

Spesso in statistica è necessario decidere se due differenti approcci allo stesso problema hanno portato al medesimo risultato oppure no. Nel confronto tra parametri di due diverse popolazioni (p.es. nel controllo della sperimentazione di un nuovo farmaco o di una nuova procedura) è possibile verificare che due popolazioni normali abbiano la stessa media sia quando le varianze delle due popolazioni sono uguali, sia quando non lo sono.

10.7 Test sulla media di due popolazioni normali quando le varianze sono note

10.7.1 Test bilaterale o a due code

Siano dati due campioni casuali indipendenti:
$X_1, ..., X_n$ c.c. estratto da una popolazione normale $N(\mu_X, \sigma_X^2 \,\text{nota})$
$Y_1, ..., Y_m$ c.c. estratto da una popolazione normale $N(\mu_Y, \sigma_Y^2 \,\text{nota})$

Si vuole verificare

$$\text{l'ipotesi nulla } H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

contro

$$\text{l'ipotesi alternativa } H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$$

Sappiamo che le medie campionarie $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_m$ sono gli stimatori puntuali delle medie incognite μ_X e μ_Y, perciò H_0 viene rifiutata quando $|\overline{X}_n - \overline{Y}_m| > c$, con c costante opportuna da determinare in base al livello di significatività α, fissato a priori.

Poichè $\overline{X}_n \sim N(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n})$ ed $\overline{Y}_m \sim N(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{m})$, la variabile casuale $\overline{X}_n - \overline{Y}_m$ è ancora una normale con media e varianza pari a:

$$E[\overline{X}_n - \overline{Y}_m] = \mu_X - \mu_Y,$$

$$var[\overline{X}_n - \overline{Y}_m] = \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}.$$

Si consideri la variabile standardizzata

$$\frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

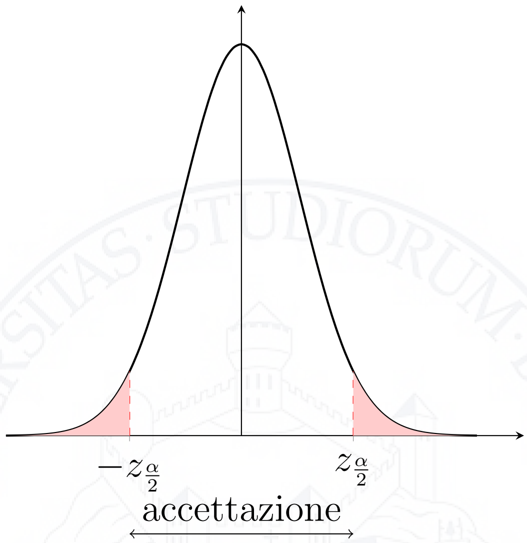
Quando H_0 è vera la statistica del test è una normale standard:

$$ST = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

e poichè $([|Z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 2P(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$, vale

REGOLA:

$$\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } |ST| > z_{\frac{\alpha}{2}}$$
$$\text{si accetta } H_0 \text{ se } |ST| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$$



Problema: Qual è il livello di significatività "giusto" da scegliere?

Prima si calcola il valore della statistica del test cioè $ST = \nu$, poi la probabilità che una normale standard, in valore assoluto, superi $|\nu|$. Questa probabilità, detta il "p-dei-dati" del test fornisce il livello di significatività critico, al di sotto del quale la decisione cambia da rifiuto ad accettazione:

$$\text{p-dei-dati} = P(|Z| > |\nu|) = 2P(Z > |\nu|).$$

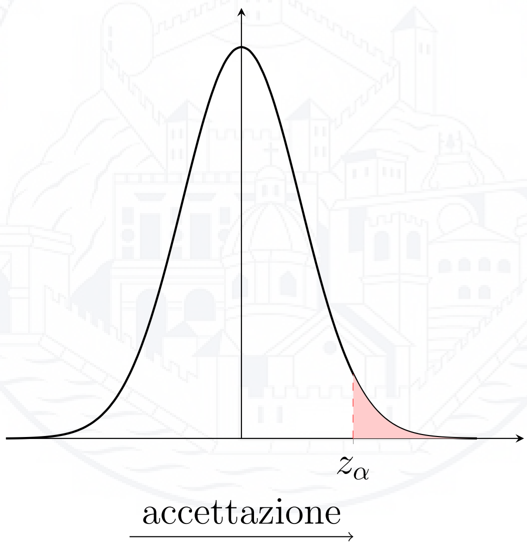
10.7.2 Test unilaterale o ad una coda

$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y$ contro $H_1 : \mu_X > \mu_Y$

Per il test al livello di significatività α vale
REGOLA:

si rifiuta H_0 se $ST > z_\alpha$
si accetta H_0 se $ST \leq z_\alpha$

e il p-dei-dati $= P(Z > \nu)$, se $ST = \nu$.



10.8 Test sulla media di due popolazioni normali quando le varianze non sono note

10.8.1 Test bilaterale o a due code

Siano dati due campioni casuali indipendenti:
$X_1, ..., X_n$ c.c. estratto da una popolazione normale N con μ_X e σ_X^2 incognite,
$Y_1, ..., Y_m$ c.c. estratto da una popolazione normale N con μ_Y e σ_Y^2 incognite.

Ipotizzando che n, m siano GRANDI, per l'elevata numerosità è lecito approssimare la varianza incognita σ^2 con la varianza campionaria S^2 in entrambe le popolazioni e considerare la variabile standardizzata

$$\frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n} + \dfrac{S_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

dove

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2,$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y}_m)^2.$$

Il test
$H_0 : \mu_X = \mu_Y$ contro $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$
consiste nella seguente
REGOLA:

$$\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } |ST^*| > z_{\frac{\alpha}{2}}$$
$$\text{si accetta } H_0 \text{ se } |ST^*| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$$

con

$$ST^* = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}},$$

oppure si utilizza il metodo del p-dei-dati, come nel caso precedente.

10.8.2 Test unilaterale o ad una coda

$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y$ contro $H_1 : \mu_X > \mu_Y$

Per il test al livello di significatività α vale
REGOLA:

$$\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } ST^* > z_{\alpha}$$
$$\text{si accetta } H_0 \text{ se } ST^* \leq z_{\alpha}$$

e il p-dei-dati $= P(Z > \nu)$, se $ST^* = \nu$.

Quesito: Quanto devono essere grandi i campioni? Empiricamente $n, m \geq 30$, anche se a volte la soglia minima è fissata a 20.

10.9 Test sulla media di due popolazioni normali quando le varianze non sono note, ma uguali

10.9.1 Test bilaterale o a due code

Siano dati due campioni casuali indipendenti:
$X_1, ..., X_n$ c.c. estratto da una popolazione normale N con μ_X e σ_X^2 incognite,
$Y_1, ..., Y_m$ c.c. estratto da una popolazione normale N con μ_Y e σ_Y^2 incognite.

Nel caso in cui la numerosità dei due campioni non sia elevata, si suppone che le due varianze siano uguali, cioè $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ e si considera la variabile standardizzata

$$\frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n} + \dfrac{\sigma^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

Nel test
$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad$ contro $\quad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$

tuttavia NON si può utilizzare la statistica

$$\widehat{ST} = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}} \sim N(0,1)$$

quando H_0 è vera, perchè $\widehat{ST}$ contiene σ^2 incognita.

Procedimento

a) ottenere uno stimatore per σ^2;

b) sostituire lo stimatore a σ^2 nella statistica $\widehat{ST}$.

Poichè S_X^2 e S_Y^2 sono entrambi stimatori della varianza σ^2 ($E[S_X^2] = \sigma_X^2$, $E[S_Y^2] = \sigma_Y^2$ e $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$), si considera una media pesata delle due varianze campionarie, definendo lo stimatore pesato S_p^2 di σ^2:

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2}{n+m-2} + \frac{(m-1)S_Y^2}{n+m-2}.$$

(si verifica facilmente che $E[S_p^2] \equiv \sigma^2$)

Si può dimostrare che, quando H_0 è vera, la statistica

$$ST_p = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}} \sim t_{n+m-2}$$

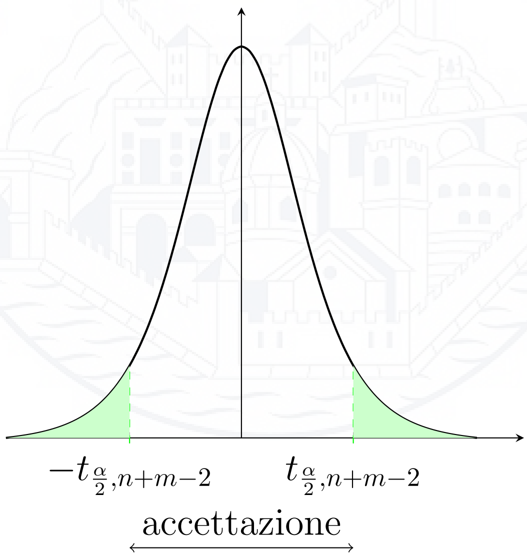
cioè una t di Student con $n+m-2$ gradi di libertà.

Quindi il test bilaterale al livello α consiste nella seguente
REGOLA:

$$\begin{array}{c}\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } |ST_p| > t_{\frac{\alpha}{2},\,n+m-2} \\ \text{si accetta } H_0 \text{ se } |ST_p| \leq t_{\frac{\alpha}{2},\,n+m-2}\end{array}$$

oppure si utilizza il metodo del p-dei-dati, dopo aver calcolato $ST_p = \nu$, per cui:

$$\text{p-dei-dati} = 2P(T_{n+m-2} > |\nu|).$$



10.9.2 Test unilaterale o ad una coda

Consideriamo sempre:

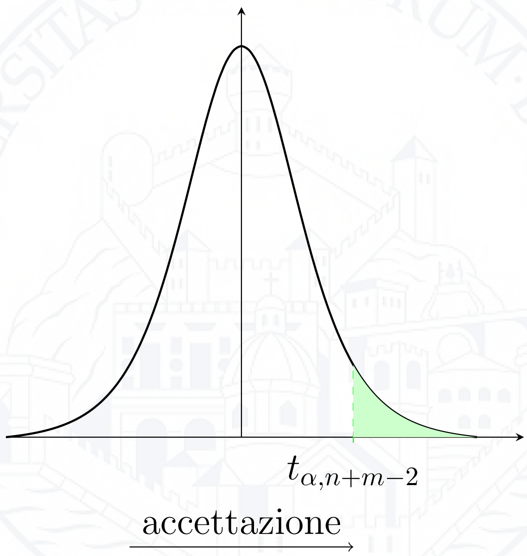
$$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y \;\text{ contro }\; H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Per il test al livello di significatività α vale

REGOLA:

$$\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } ST_p > t_{\alpha,n+m-2}$$
$$\text{si accetta } H_0 \text{ se } ST_p \leq t_{\alpha,n+m-2}$$

e il p-dei-dati $= P(T_{n+m-2} > \nu)$, se $ST_p = \nu$.



Osservazione: In generale, se le popolazioni da cui vengono estratti i campioni indipendenti non sono normali, il teorema del Limite Centrale assicura che $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_m$ hanno approssimativamente una distribuzione normale e quindi queste procedure sono applicabili a patto che $n, m \geq 30$.

Esempio: Si vuole testare un nuovo farmaco per la riduzione del colesterolo. Scelti 100 volontari, vengono divisi in due gruppi da 50 l'uno. I volontari non sanno a quale gruppo verrà somministrato il nuovo farmaco.

1° gruppo (X): nuovo farmaco

2° gruppo (Y) (detto gruppo di controllo): farmaco in uso

I dati raccolti sono:

X: riduzione media del colesterolo $\overline{X}_n = 8.8$, varianza campionaria $S_X^2 = 4.5$,

Y: riduzione media del colesterolo $\overline{Y}_n = 8.2$, varianza campionaria $S_Y^2 = 5.4$.

Questi risultati dimostrano al livello di significatività del 5% che il nuovo farmaco è più efficace? Cioè i dati sono sufficienti a provare che $\mu_X > \mu_Y$?

Si tratta di un test unilaterale sulla media:

$$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y \text{ contro } H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

dove bisogna utilizzare la statistica:

$$ST^* = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_n}{\sqrt{\frac{S_X^2}{50} + \frac{S_Y^2}{50}}} = \frac{8.8 - 8.2}{\sqrt{\frac{4.5}{50} + \frac{5.4}{50}}} = 1.3484$$

A livello $\alpha = 0.05$, l'ipotesi nulla H_0 viene rifiutata se $ST^* > z_{0.05}$, dove $z_{0.05} = 1.65$. Poichè questo non è vero, non c'è sufficiente evidenza empirica per stabilire al 5% che il nuovo farmaco sia più efficace del vecchio.

Volendo utilizzare il p-dei-dati:

$$\text{p-dei-dati} = P(Z > \nu) = P(Z > 1.3484) \approx 0.089$$

che risulta > 0.05, quindi H_0 non va rifiutata.