

B Richiami di calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio è una branca della matematica orientata allo sviluppo di formule che permettono di ottenere il numero dei modi con cui si possono disporre gli elementi di un insieme finito di oggetti, senza ricorrere alla loro enumerazione esplicita.

Principio fondamentale del calcolo combinatorio

Se una scelta può essere fatta in n_1 modi diversi, per ciascuno dei quali una seconda scelta può essere effettuata in n_2 modi diversi e per ciascuno dei modi con cui si sono compiute le prime due scelte, una terza scelta può essere fatta in n_3 modi diversi, etc..., allora la successione di tutte le scelte può essere compiuta in $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots$ modi diversi.

1) Permutazioni semplici

Dati n oggetti, si chiamano permutazioni semplici i modi con cui possiamo disporre gli n oggetti in n posizioni.

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

$$n! = n(n - 1)!$$

$$0! = 1$$

Esempio

In quanti modi si possono disporre 4 persone su 4 sedie?

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

2) Permutazioni cicliche

Se gli elementi di una permutazione semplice sono disposti in maniera circolare (il primo e ultimo elemento non sono individuabili)

$$P_n^{(c)} = (n - 1)!$$

Esempio

In quanti modi diversi 4 persone si possono sedere attorno ad un tavolo?

$$P_4^{(c)} = 3! = 6$$

3) Permutazioni con ripetizione

Si parla di permutazioni con ripetizione quando gli n oggetti non sono tutti distinti cioè:

n_1 di un tipo.

n_2 di un secondo tipo, distinto dal primo.

n_3 di un terzo tipo, distinto dai primi due.

⋮

n_k di un k -esimo tipo, distinto dai precedenti.

Gli n_i , $i = 1, \dots, k$, sono tali che

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

per cui

$$P_{n;n_1, \dots, n_k}^{(r)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Esempio

Quanti sono i numeri che si possono formare con le 4 cifre dell'insieme $A = \{1, 2, 2, 3\}$?

$$P_{4;1,2,1}^{(r)} = \frac{4!}{1!2!1!} = 12$$

4) Disposizioni semplici

Si chiama disposizione semplice di n oggetti di classe k ($k \leq n$) ogni allineamento, con oggetti tutti distinti, di n oggetti a gruppi di k , ovvero le k -uple ordinate ottenute con n oggetti distinti.

$$D_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Esempio

Qual è il numero di disposizioni di 4 oggetti di classe 2?

$$D_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Osservazione

$$D_{n,n} = P_n = n!$$

cioè le permutazioni semplici sono disposizioni semplici con $k = n$ e differisce solo l'ordine.

5) Disposizioni con ripetizione

Si chiama disposizione con ripetizione di n oggetti di classe k ogni allineamento di n oggetti a gruppi di k , ogni oggetto eventualmente ripetuto una o più volte.

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k$$

Esempio

Quanti numeri di due cifre e quanti di 3 cifre si possono scrivere con gli elementi, anche ripetuti, dell'insieme $A = \{1, 2, 5, 8\}$?

$$D_{4,2}^{(r)} = 4^2 = 16$$

$$D_{4,3}^{(r)} = 4^3 = 64$$

6) Combinazioni semplici

Le combinazioni semplici di n oggetti presi k a k ,

sono il numero di campioni non ordinati di numerosità k , ovvero il numero di sottoinsiemi distinti di cardinalità k che si possono formare con gli elementi di un insieme di cardinalità n ($k \leq n$).

Dati n oggetti, in quanti modi se ne possono scegliere k ?

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \text{COEFFICIENTE BINOMIALE}$$

Esempio

Quante sono le terne che si possono formare con i 90 numeri del Lotto?

$$C_{90,3} = \frac{90!}{3!87!} = \frac{88 \cdot 89 \cdot 90}{6} = 117.480$$

6) Combinazioni con ripetizione

Una combinazione con ripetizione è una combinazione in cui uno stesso elemento può avere delle ripetizioni.

Si considerano differenti due raggruppamenti se differiscono:

- per qualche elemento
- per il numero delle volte in cui un dato oggetto viene ripetuto.

In tal caso $k \leq n$

$$C_{n,k}^{(r)} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Esempio

Quanti gruppi con 2 elementi si possono formare con gli oggetti dell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

$$C_{5,2}^{(r)} = C_{6,2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

