

6 Le variabili casuali congiunte

6.1 Definizioni e proprietà

Nei casi trattati, gli esiti di un esperimento erano considerati realizzazioni di una singola variabile casuale. Tuttavia, in alcune situazioni può essere necessario o desiderabile ottenere esiti simultanei da più variabili casuali.

È possibile estendere il concetto di variabile casuale, di funzione di ripartizione, di funzione di densità di una variabile casuale al caso n -dimensionale.

Definizione: Chiamiamo **variabile casuale n -dimensionale** una funzione $X = (X_1, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\forall (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$

$\{w \in \Omega : X_1(w) \leq r_1, \dots, X_n(w) \leq r_n\}$ è un evento.

Quindi una variabile casuale n -dimensionale è una n -upla di variabili casuali, le quali associano un numero ad un risultato.

Definizione: Chiamiamo **funzione di ripartizione congiunta** di $X = (X_1, \dots, X_n)$, la funzione

$$F_{X_1, \dots, X_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$$

tale che $\forall x = (x_1, \dots, x_n)$

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n].$$

Come nel caso unidimensionale, per definire la funzione di densità congiunta bisogna distinguere il caso discreto dal caso continuo.

Definizione: Chiamiamo **funzione di densità discreta congiunta** di $X = (X_1, \dots, X_n)$, variabile casuale discreta n -dimensionale, la funzione:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n].$$

Proprietà

- $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n)$
- $\sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = 1$
- $\forall A \subset \mathbb{R}^n \quad P[(x_1, \dots, x_n) \in A] = \sum_A f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$

Definizione: La v.c. n -dimensionale $X = (X_1, \dots, X_n)$ è detta **continua** se e soltanto se esiste una funzione

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

integrabile $\forall x_k$ tra $-\infty$ e $+\infty$, tale che:

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n$$

$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ed $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$ è detta **funzione di densità continua congiunta**.

Proprietà

- $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n)$
- $\int_{\mathbb{R}^n} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = 1$
- $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ regione regolare

$$P[(x_1, \dots, x_n) \in A] = \int_A f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Nel caso $n = 2$ elenchiamo le proprietà della funzione di ripartizione congiunta relativa alla variabile casuale bidimensionale (X, Y) .

Proprietà di $F_{X,Y}(x, y)$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0 \quad \forall y$

- $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0 \quad \forall x$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F_{X,Y}(x, y) = 1$

- se $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$ allora

$$P[x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2] = F_{X,Y}(x_2, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) \geq 0$$

- $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_{X,Y}(x + h, y) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F_{X,Y}(x, y + h) = F_{X,Y}(x, y)$ (continuità a destra)

Dalla funzione di densità congiunta $f_{X,Y}(x, y)$ delle v. c. congiunte X, Y è possibile ricavare le funzioni di densità $f_X(\cdot)$ di X e $f_Y(\cdot)$ di Y , dette funzioni di densità **marginali**.

Definizione: Le funzioni di densità **marginali** di X e di Y sono:

$$f_X(x_k) = \sum_j f_{X,Y}(x_k, y_j), \quad f_Y(y_k) = \sum_j f_{X,Y}(x_j, y_k)$$

se X, Y sono congiunte discrete,

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx$$

se X, Y sono congiunte continue.

Nota bene: Dalla funzione di densità congiunta è possibile sempre ricavare le funzioni di densità marginali, **ma non vale il viceversa**.

Ricordando la definizione di probabilità condizionata

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0,$$

se ora A è l'evento definito da $X = x$ e B è l'evento definito da $Y = y$, allora

$$P[X = x|Y = y] = \frac{P[X = x, Y = y]}{P[Y = y]}, \quad P[Y = y] > 0$$

ed è possibile dare la definizione formale di funzione di densità condizionata.

Definizione: Date X, Y variabili casuali congiunte (discrete o continue) con funzione di densità congiunta $f_{X,Y}$, chiamiamo **funzione di densità condizionata** di X , dato $Y = y$, la funzione:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0.$$

Analogamente si definisce la **funzione di densità condizionata** di Y , dato $X = x$, la funzione:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0.$$

Nota bene:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y), \\ f_{X,Y}(x, y) &= f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x). \end{aligned}$$

6.2 Indipendenza

Definizione: Data $X = (X_1, \dots, X_n)$ variabile casuale n -dimensionale (discreta o continua) con funzione di densità congiunta f_{X_1, \dots, X_n} , X_1, \dots, X_n sono variabili casuali **indipendenti** se e solo se

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n),$$

cioè la funzione di densità congiunta si scrive come prodotto delle funzioni di densità marginali.

Nel caso bidimensionale si ha quindi che X, Y sono indipendenti se e solo se $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

Osservazione

Se X_1, \dots, X_n sono variabili casuali indipendenti e se g_1, \dots, g_n sono n funzioni tali che $Y_k = g_k(X_k)$,

$k = 1, \dots, n$, sono variabili casuali, allora Y_1, \dots, Y_n sono indipendenti.

6.3 Estensione del concetto di valore atteso

Vogliamo ora estendere il concetto di valore atteso di una variabile casuale unidimensionale al caso n -dimensionale.

Definizione: Sia $X = (X_1, \dots, X_n)$ una variabile casuale n -dimensionale con funzione di densità congiunta $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$ e sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su X_1, \dots, X_n , cioè $g = g(X_1, \dots, X_n)$ (a sua volta è una variabile casuale).

Definiamo **valore atteso** di g la quantità:

$$E[g] = \sum g(x_1, \dots, x_n) f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$$

se X è discreta,

$$E[g] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) f_{X_1, \dots, X_n}(\cdot) dx_1 \cdots dx_n$$

se X è continua.

Nel caso $n = 2$, se $g(X, Y) = (X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$
 $\Rightarrow E[g] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$

Definizione: Date le variabili casuali X e Y , definiamo **covarianza** di X e Y la quantità:

$$\sigma_{X,Y} = \text{cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Proprietà della covarianza

1. $\text{cov}[X, Y] = E[XY] - \mu_X\mu_Y$
2. $\text{cov}[aX, bY] = ab \text{cov}[X, Y] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
3. $\text{cov}[X, Y] = \text{cov}[Y, X]$
4. $\text{cov}[X, X] = \text{var}[X]$
5. $\text{cov}[X + Y, Z] = \text{cov}[X, Z] + \text{cov}[Y, Z]$

La covarianza tra due variabili casuali descrive la possibilità che tra le due variabili possa esistere una **relazione di tipo lineare**. Se la covarianza è nulla, tra X ed Y è possibile che esista una relazione di tipo non lineare.

La covarianza dipende dall'unità di misura utilizzata per misurare X e Y ; perciò si preferisce usare un altro indice, indipendente dall'unità di misura.

Definizione: Date le variabili casuali X e Y con covarianza $\text{cov}[X, Y]$ e deviazioni standard rispettivamente σ_X e σ_Y , definiamo **coefficiente di correlazione**

di X e Y il numero:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Proprietà di $\rho_{X,Y}$

1. $|\rho_{X,Y}| \leq 1$
2. $\rho_{X,Y} = 0$ se $\text{cov}[X, Y] = 0$
3. Se $Y = mX + q$ (dipendenza lineare), allora

$$\begin{cases} \rho_{X,Y} = 1 & \text{se } m > 0, \\ \rho_{X,Y} = -1 & \text{se } m < 0. \end{cases}$$

4. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \rho_{aX, bY} = \rho_{X,Y}$

Proposizione 1. Siano X, Y variabili casuali indipendenti e g_1, g_2 funzioni tali che $g_1 = g_1(X)$ e $g_2 = g_2(Y)$ siano variabili casuali. Allora vale

$$E[g_1 \cdot g_2] = E[g_1] \cdot E[g_2]$$

Proposizione 2. Se X, Y sono variabili casuali indipendenti allora $\text{cov}[X, Y] = 0$

Osservazione

$\text{cov}[X, Y] = 0 \not\Rightarrow X, Y$ indipendenti
cioè se $\text{cov}[X, Y] = 0$

NON VALE

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Definizione: Due variabili casuali X, Y si dicono **non correlate** se e solo se $\text{cov}[X, Y] = 0$.

Quindi:

INDIPENDENZA \Rightarrow NON CORRELAZIONE
 \neq

Nota bene: Esiste un solo caso in cui $\text{cov}[X, Y] = 0 \Rightarrow$ indipendenza. Ciò avviene quando la funzione di densità congiunta di X ed Y è **gaussiana**.

6.4 Combinazioni lineari di variabili casuali

Date n variabili casuali X_1, \dots, X_n si consideri:

$$1) \quad g(X_1, \dots, X_n) = X_1 + \dots + X_n$$

si può dimostrare che:

$$\bullet \quad E[g] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

- $\text{var}[g] = \sum_{i=1}^n \text{var}[X_i] + 2 \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \text{cov}[X_i, X_j]$

2) $g(X_1, \dots, X_n) = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$

con $a_i \in \mathbb{R}$, per $i = 1, \dots, n$.

- $E[g] = \sum_{i=1}^n a_i E[X_i]$

- $\text{var}[g] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{var}[X_i] + 2 \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} a_i a_j \text{cov}[X_i, X_j]$

3) $g(X_1, \dots, X_n) = X_1 + \dots + X_n$

con $\text{cov}[X_i, X_j] = 0, i \neq j$, cioè X_i a due a due non correlate

- $E[g] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$

- $\text{var}[g] = \text{var} \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n \text{var}[X_i]$

4) $g(X_1, \dots, X_n) = X_1 + \dots + X_n$

con X_i a due a due non correlate ed identicamente distribuite cioè $\text{cov}[X_i, X_j] = 0$ per $i \neq j$; $\mu_{X_i} = \mu$ e $\sigma_{X_i}^2 = \sigma^2$, $\forall i = 1, \dots, n$

- $E[g] = n\mu$

- $\text{var}[g] = n\sigma^2$

5) $g(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$

con X_i a due a due non correlate ed identicamente distribuite con media μ e varianza σ^2 , detta **media campionaria**

- $E[g] = E[\bar{X}_n] = \mu$

- $\text{var}[g] = \text{var}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$

Osservazione

Nei casi 4) e 5) l'ipotesi di non correlazione a due a due può essere sostituita con l'ipotesi **più forte** di **indipendenza** (**indipendenza** \Rightarrow **non correlazione**).

\nLeftarrow

In tal caso le variabili casuali X_1, \dots, X_n si dicono **indipendenti ed identicamente distribuite**, abbreviate con la dicitura **i.i.d.**

Relativamente al caso 5) è possibile provare che se X_i sono i.i.d. con funzione di densità normale $N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$\bar{X}_n \text{ è NORMALE } N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$